Math. P. 382 cs Ohm

5/3 52

R

Grundlinien
zu einer
zweckmäßigen Behandlung
der
Geometrie
als
höheren Bildungsmittels
an
vorbereitenden Lehranstalten.

Entworfen
von
Dr. Georg Simon Ohm.

Mit zwei Kupfertafeln.

Erlangen 1817
bei J. J. Palm und Ernst Enke.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Die beträchtlichen Abweichungen in der Form und dem Wesen dieser Schrift von andern ähnlichen Inhalts fordern eine besondere Rechtfertigung derselben, die dieses Vorwort unternimmt.

Bei den Griechen, zur Zeit der vollen Blüthe ihrer geistigen Kultur, behauptete die Geometrie unter allen Zweigen des höhern Unterrichtes den ersten Rang; bei uns hingegen ist dieselbe Lehre ihrem gänzlichen Verfalle sehr nahe, wie die tägliche Erfahrung zeigt. Kaum sichert noch der ernste Ruf aus einer bedeutungsvollen Vorzeit ihre Würde; kaum vermögen noch ihre wenigen Verehrer mit aller Anstrengung zu verhindern, daß nicht ein Trugbild, entsprungen aus der Vereinigung geistiger Schlaffheit und niedriger Erwerbsucht mit ihrem Namen prange. Ist wohl diese bei dem höhern Unterrichte sonst so gepriesene Lehre von einer andern trefflichern verdrängt? oder ist im Laufe der

Zeit ihre ursprüngliche Reinheit getrübt, ihre hohe Kraft geschwächt worden? Ist vielleicht jene Tiefe der Gedanken, jene Eigenthümlichkeit der Ideen jene umfassende Größe des Geistes, die wir so sehr an den griechischen Philosophen bewundern, ohne sie erreichen zu können, ein auf immer verschwundenes Erbtheil ihres Vaterlandes gewesen? oder fehlt uns die Aufsicht und Pflege, welche solche Früchte zur Reife bringen? — Die Beantwortung dieser Fragen verdient alle Aufmerksamkeit.

Der Zweck aller höhern Geistesbildung besteht zuletzt darin, die Verstandeskräfte des Menschen durch alle Zwischenstufen ihrer Entwickelung bis auf den Punkt der Reife zu bringen, von wo aus sie, abgesondert von äußern Antrieben, fähig sind, durch Zerlegung und Verbindung erhaltener Begriffe Vernunfterkenntnisse in und durch sich selbst nach Absicht und mit Bestimmtheit hervorzubringen. Wessen Denkkraft bis auf diese Höhe gekommen ist, in dessen Innerem hat sich eine neue Welt gestaltet, die mit der Außenwelt in beständiger Wechselwirkung steht, um zu einer vollendeten Harmonie zwischen der innern und äußern Natur zu gelangen. Um aber im Kampfe nach diesem Ziele der erforderlichen Kraft und des glücklichen Erfolgs sicher zu seyn, muß vor Allem die eigenthümliche Wirkungsweise eines jeden Unterrichtsmittels auf das Denkvermögen, so wie die nothwendige Verbindung aller Lehrzweige unter einander zu einem ge-

schlossenen Systeme der Unterrichtskunst unbesiegbar dargethan und gewissenhaft beachtet werden. So lange bei dem Unterrichte noch das Wort des Wortes willen, der Stoff des Stoffes halber gegeben wird, geht die rohe Masse todt über in das zarte Gemüth, und erstickt dort, statt zu beleben, den Keim des höheren Seyns.

Unter den höhern Bildungsmitteln verdient die rationelle Geometrie eine ehrenvolle Stelle. Ihr rein geistiger und doch mit der Sinnlichkeit so nahe verwandter Gegenstand erleichtert den Uebergang vom Anschauen zum Denken; ihr höchst einfacher und doch so vernunftgemäßer Bau eignet sie im hohen Grade zur Leitung des Menschen aus dem Gebiete des imitativen Verstehens in das Reich des produktiven Forschens. Aber diesen Uebergang zu bewerkstelligen, wird an dem Zöglinge schon ein bestimmter Grad geistiger Ausbildung vorausgesetzt; wer zu diesem Unterrichte zugelassen werden soll, muß nämlich die Fertigkeit erlangt haben, im Besondern das Allgemeine leicht zu erblicken, aus der ganzen Reihe gleichartiger Vorstellungen den allen zu Grunde liegenden Begriff sicher zu entwickeln. Es wäre eben so vergeblich, einen Menschen, der noch nicht auf dieser Stufe steht, mit einem Kraftaufwande, der ihn zermalmt, auf eine höhere zu treiben, als es zweckwidrig ist, denjenigen, der dazu geeignet ist, und dessen Bestimmung ihm den höchsten Gipfel zu erreichen gebietet, da-

von abzuhalten. Im Vorwärtsgehen mit solchen Zöglingen, die auf dem bezeichneten Standpunkte stehen, ist wieder jeder Sprung sorgfältig zu vermeiden, damit sie in ihrem Gesichtskreise stets befreundete Gestalten wieder finden, und immer sicher wandeln auf dem heimischen Boden. Darum ist es zuträglich, den ganzen geometrischen Unterricht in zwei Kurse zu trennen: in einen niedern, wo die Gegenstände nur bis in eine, von den Sinnen noch erreichbare Ferne verfolgt, und blos Beweise und Auflösungen einfacher Sätze entwickelt werden; und in einen höhern, wo die Auffindung dieser Sätze selbst und ihre Verbindung unter einander zu einem geschlossenen Lehrsysteme, so wie die Zerlegung aller Begriffe in ihre letzten Theile den Gegenstand der Betrachtung ausmachen *). Nur der niedere kommt hier zur Sprache; über den höhern soll eine eigene Abhandlung erscheinen, wenn das Urtheil über diesen ersten Versuch mich wird überzeugt haben, daß mein Glaube an die Wichtigkeit solcher Nachforschungen kein leerer Wahn, meine darauf verwendete Mühe kein eitler Zeitverlust gewesen ist.

*) Die an diesen Kurs gemachten Forderungen bezeichnen, meines Erachtens, deutlich den Charakter des akademischen Vortrags; der wird freilich unausführbar bleiben, so lange der vorbereitende seine niedrige Natur nicht wird abgelegt haben.

Seit der Wiedergeburt der Geometrie in Europa begnügte man sich größtentheils damit, ihre Sätze dem Lernenden, wie ein mechanisches Kunstwerk, zur Anschauung und Zerlegung hinzustellen. — Ihre Lehrsätze werden im bunten Gewühle an einander gereiht und zergliedert, die dazu gehörigen Beweise wie aus einer Geisterwelt mit magischer Kraft hervorgerufen und erläutert; dieser Zauberkreis wird hierauf so oft wieder von neuem beschrieben, bis sich seine Gestalten wie Bilder aus einem geheimnißvollen Traume dem Gedächtnisse des Schülers eingeprägt haben. Bei diesem Unterrichte, dessen höchstes Streben dahin zielt, gegebene Beweise verständlich und erinnerlich zu machen, wird der Zögling, beständig an äußere Merkmale gebunden, in ein Meer voll Einzelnheiten getaucht. Darum wird immer nur der anschaulichste Beweis vorgezogen, und die Anzahl der Lehrsätze auf alle mögliche Weise verringert; man greift nach allen zu Gebote stehenden mnemonischen Hülfsmitteln, und erkennt den bessern Schüler an seiner größern Fertigkeit im Vortrage des Gelernten. Daraus erklärt sich die qualvolle Unbehülflichkeit des Zöglings, wenn irgend ein Umstand störend auf das leblose Aggregat seines Gedächtnisses wirkt, und seine gänzliche Hülflosigkeit, wenn ihm ein, nicht unter die Zahl der erlernten gehöriger Lehrsatz zum Beweise vorgelegt wird. Daher rührt endlich auch die große Schwierigkeit, womit

der Schüler bei Erlernung geometrischer Beweise zu kämpfen hat, und, als eine natürliche Folge derselben, der starke Widerwille gegen ein Geschäft, das, bis zum Ueberdrusse wiederholt, doch keine Früchte sehen läßt. Nimmt man hierzu noch die Menge zufälliger, so häufig eintretender Hindernisse, die sich dem Studium der Mathematik entgegenstellen, so kann man sich über die Lauheit mit der es gewöhnlich empfohlen und getrieben wird, kaum mehr wundern. Fehlt ja nicht mehr viel, daß ihre Würde gesunken wäre, bis zu dem verächtlichen Dienste eines Lückenbüssers; ihr Ansehen, bis zu dem falschen Glanze eines angeerbten, nicht mehr bestehenden Verdienstes! Und in der That, welchen Vorzug verdient eine solche Unterrichtsart vor jeder andern? Wird vielleicht der Verstand durch die Erklärung irgend einer andern durch Grund und Folge, oder Ursache und Wirkung bedingten Erscheinung weniger geübt, als durch die Erklärung eines geometrischen Beweises!

Die Geometrie aber, wenn sie den Vorrang vor andern Zweigen des Unterrichts sich wahrhaft sichern will, muß gerade den Damm, welcher das bloße Begreifen vom eigenen Forschen scheidet, durchbrechen; sie muß den Menschen, dessen Denken bisher nur der Wiederhall eines Gedachten war, zwingen, mit der in seinem Innern lodernden Flamme alle von dieser erreichbaren Gegenstände schlechthin durch sich selbst zu läutern und zu beleuchten.

Es wirkt zwar die Denkkraft nach einer sich immer gleichen Weise; allein sie muß ihre Selbstständigkeit und Unabhängigkeit kennen gelernt haben, wenn sie nicht zaghaft hinter die Bollwerke des Gedächtnisses sich zurückziehen soll; ihre schöpferische Kraft muß sich entwickelt haben, damit sie nicht knechtisch von den Vorurtheilen einer geistigen Despotie sich beherrschen lasse; sie muß sich ihrer unüberwindlichen Stärke bewußt geworden seyn, um nicht kleinmüthig bei einem unerwarteten Widerstande die Flucht zu ergreifen.

Diese Forderungen an die Geometrie, als Mittel zur Bildung der Denkkraft, werden rücksichtlich ihrer Beweise erfüllt, wenn der Zögling zuerst mit dem Wesen und Wirken des beim Beweisen thätigen, in ihm ruhenden Vermögens genau bekannt gemacht wird; wenn man ihn hierauf anleitet, durch dieses Vermögen, unabhängig von jeder äussern Vorschrift, die Beweise vorgelegter Sätze aus und durch sich selbst hervorzubringen; wenn ihm endlich durch allmählige Anhäufung jenes Vermögen störender Hindernisse die Gewandtheit mitgetheilt wird, solche hemmende Kräfte zu überwältigen oder zu umgehen. Auf diese Weise wird der Schüler erhoben über jeden empirisch gegebenen Beweis, und unbekümmert um die Menge zu erweisender Lehrsätze; er wird losgerissen von dem niedrigen Joche des Gedächtnisses, und in seinem Wirkungskreise nirgends durch sklavische Grenzen beengt;

er lernt fremde Hülfe verschmähen, und durch eigene Kraft mit innerer Gewißheit, wenn gleich langsam, ein vorgestecktes Ziel erreichen; das Fortschreiten im Wissen fällt ihm nicht schwer, weil bei demselben das Gesetz der Stetigkeit nicht verletzt werden kann, und der gute Erfolg seiner Bemühung, das lebendig gewordene Gefühl seiner Kraft erfüllt ihn mit Liebe und Achtung zu dem Geschäfte des Beweisens.

Keine andere Bewandtniß hat es mit den Aufgaben und ihren Auflösungen. Auch hier wird die Auflösung, wie dort der Beweis, erst empirisch gegeben und dann verständlich gemacht, erwiesen; daher stellen sich alle dort erwähnten Uebelstände mutatis mutandis auch hier ein, werden aber auch beseitigt, wenn in dem Schüler die beim Auflösen rege Thätigkeit geweckt wird; wenn die Auflösungen vorgelegter Aufgaben nicht in ihn hineingetragen, sondern durch Erregung der sie schaffenden Thätigkeit aus ihm hervorgebracht werden; wenn endlich diese in ihm erwachte Thätigkeit so lange geübt und gestärkt wird, bis sie Kraft genug erlangt hat, jeden ihr widerstrebenden Gegenstand aus dem Wege zu räumen. Was hat auch wohl der Rationalist vor dem Empiriker voraus, wenn er gleich diesem am Gängelbande der Erfahrung sich anhalten muß? Vielleicht mehr Klarheit und Bestimmtheit, weil er im Stande ist, seine Handlungen mit objektiven Gründen zu belegen? Jeder-

mann weiß indeß, daß auf der Seite des Empirikers mehr Selbstvertrauen und Zuversicht steht, weil, was er ins Leben ruft, aus dem Leben genommen ist!

Gegenwärtige Schrift hat es sich zur Aufgabe gemacht, zu zeigen, wie durch den Unterricht der Geometrie die Denkkraft des Menschen lebendig ergriffen und stufenweise, aber mit Zuverläßigkeit, bis auf den Gipfel ihrer irdischen Größe geleitet werden könne. — Ich höre hier den Einwurf kommen, daß ja, wie die Erfahrung beweise, ein anhaltendes fortgesetztes Studium der Geometrie schon ohnehin immer zu demselben Resultate geführt habe; allein — wie viele von jenen, die nicht mehr Zeit auf diesen Theil des vorbereitenden Unterrichts verwenden können oder wollen, als ihm billigerweise im Allgemeinen zugestanden werden darf, ziehen wohl daraus einen erheblichen, nicht blos eingebildeten Vortheil? zudem — sind Männer, welche sich über den erschlaffenden Nebel der Autorität erheben, unter den Bekennern der Mathematik nicht eben so selten, als in jedem andern Theile der Gelehrsamkeit? und — wenn durch einen Zusammenfluß günstiger Umstände ein Mensch die Ketten, womit gebieterischer Eigensinn seine Mündigkeit gefangen hält, im Unbedacht zerbricht, ist diese That der Vormundschaft, und nicht dem Spiel des blinden Glückes zuzuschreiben? Man wird es doch wohl einer Kunst nicht zum Verdienste anrechnen, daß

sie das Gelingen ihrer Gebilde dem Zufalle überläßt! Es wird immer in dem Gelehrtenstande, wie in jedem andern, Individuen geben, die sich nicht über die leblosen Formen ihrer Berufsarbeiten erheben können; allein sollen deswegen auch alle übrigen, deren Augen vom reinen Lichte nicht geblendet werden, die Wahrheit nur verschleiert sehen? sollen nur die in den Tempel der Weisheit gelangen, die aus einem geheimen Drange die Pforten zum Heiligthume gewaltsam aufsprengen?!

Möge es dieser Arbeit gelingen, angehende Lehrer der Mathematik an gelehrten Schulen auf die Eigenthümlichkeit ihres Lehrzweckes aufmerksam zu machen, damit all ihr Streben nur auf das eine zu erreichende letzte Ziel gerichtet werde; sie mit der erhabenen Tendenz ihres Berufs vertraut zu machen, damit sie in reinem Eifer für denselben erglühen und der hohe Entschluß in ihnen reife, für die Veredlung des Menschengeschlechtes sich freiwillig hinzugeben der Härte und dem Undanke ihres entarteten Standes! Möchte man es doch beherzigen, daß nicht die Strenge der Beweise das Studium der Geometrie so schwierig, nicht die Allgemeinheit der Sätze ihren Vortrag so trocken mache! Diese Trockenheit entstehet, wenn dem Schüler alle freie Regsamkeit genommen, wenn er gezwungen wird, gleich einer leblosen Bildsäule äußere Formen in sich aufzunehmen, alle eigene Individualität zu verläugnen, um eine fremde sich ein-

impfen zu lassen; jene Schwierigkeit stellt sich ein, wenn der Lernende ohne freie Umsicht weiter geführt, wenn er gezwungen wird, gleich einem Wanderer, den man seiner Augen beraubt hat, sich an jedem Gegenstande, auf den er stößt, anzuklammern, seine eigene Kraft ungenützt liegen zu lassen, um mit fremder Hülfe aus dem Labyrinthe, in dem er sich dünkt, zu entkommen.

Alle in der Einleitung vorkommenden Sätze, so wie die in den vier ersten Paragraphen den Erklärungen angehängten Zusätze, sind obigem Plane gemäß ihrer Abstraktion halber vorerst nur aus der Erfahrung herzuleiten und ins klare Bewußtseyn zu bringen. Dabei überzeuge man sich an jeder Stelle, daß der Schüler das Gehabte dem Sinne, nicht dem Worte nach, aufgefaßt habe *). Die größte Sorgfalt verdient der daselbst in gedrängter Kürze entworfene Abriß der geometrischen Methode**).

*) Die Leichtigkeit, womit der Lernende hierbei vorschreitet, giebt nach dem, was schon oben hierüber gesagt worden ist, seine Fähigkeit, so wie die Schwierigkeit, seine Untauglichkeit zu diesem Unterrichte zu erkennen. Jünglinge von 14 oder 15 Jahren von mittlerer Erziehung sind, meiner Erfahrung zufolge, in der Regel dazu schon völlig geeignet.

**) Dabei hat man sich insbesondere vor zwei Irrthümern zu hüten. Der eine besteht darin, wenn man

Man suche dem Zögling eine richtige und lebendige Ansicht sowohl von dem Gebrauche der Bilder in der Geometrie, als von dem Organismus des Beweisens und Auflösens beizubringen, wobei es am besten seyn wird, von ganz einfachen Beispielen, die in seiner nächsten Umgebung liegen, auszugehen, und allmählig zu verwickeltern fortzuschreiten. Hierin übe man ihn unermüdet, bis es keinem Zweifel mehr unterliegt, daß er den Geist des Vorgetragenen sich völlig zu eigen gemacht hat.

Auch dürfte es hier am Orte seyn, dem Lehrlinge seinen Standpunkt näher zu bezeichnen. Man stelle ihm lebhaft vor, daß es bei diesem Unterrichte einzig auf seine geistige Veredlung abgesehen sey; daß die Geometrie durch ihre hohe Vollendung und Einfachheit besonders dazu geeignet sey, den Sinn

---

die Begriffe selbst mit den ihnen entsprechenden Bildern verwechselt; es sind aber die Bilder nichts anders als sehr zweckmäßige Bezeichnungen geometrischer Begriffe, statt deren allerdings, jedoch nicht ohne Nachtheil für Kürze und Deutlichkeit, andere Zeichen genommen werden könnten. In den andern Irrthum verfällt man, wenn man die geometrische Methode von der einer andern synthetischen Lehre für ganz verschiedenartig hält; denn die Methode ist immer eine und dieselbe (die Ausdrücke: Erklärung, Lehrsatz, Aufgabe und ähnliche machen ja nicht das Wesen der Methode aus), wiewohl sie sich um so reiner entfalten kann, je vollständiger die Materie, auf die sie wirkt, sich entwickeln läßt.

für höheres Wissen in ihm zu erregen und zu nähren, ohne ihn durch ihre Unergründlichkeit zum Nachbeten oder durch ihre Unbestimmtheit zum Schwärmen zu verleiten; daß sein durch dieses Studium zur Reife gebrachtes Denkvermögen ohne Furcht vor Verirrung auf jedem andern Pfade in das Reich der Wahrheit eingehen könne, und, vertraut mit den Forderungen an ein reines Vernunftgebäude, berufener werde, ihr Gebiet zu bereichern und zu erweitern. — Die Erwerbung nützlicher Sachkenntnisse darf bei dieser Aufmunterung höchstens nur im Hintergrunde figuriren. —

Hieraus erhellet, daß bei diesem Unterrichte in dem Schüler das Streben nach höchster Intensität seiner Kenntnisse stets vorherrschend seyn müsse. Wird ihm ein Lehrsatz vorgelegt, so hat er nicht darauf zu sehen, ob derselbe mehr oder weniger von sich selbst einleuchtend sey; nicht einmal, wenn zu demselben ein Beweis gefügt wäre, auf diesen Beweis seine ganze Aufmerksamkeit zu wenden, ihn einzustudiren, wie man es zu nennen pflegt: ihm steht es lediglich zu, die allgemeine Vorschrift, sich von der Wahrheit eines Lehrsatzes zu überzeugen, diesem besondern Falle anzupassen, um auf diese Weise schlechthin durch sich selbst zu einem, ja dem Verfahren nach zu allen möglichen Be-

weisen des fraglichen Lehrsatzes zu gelangen. Wird ihm eine Aufgabe vorgelegt, so hat er nicht darauf zu sehen, ob eine Auflösung derselben ihm bekannt sey oder nicht; nicht einmal, wenn zu der Aufgabe eine ihm unbekannte Auflösung gefügt wäre, auf diese seine ganze Aufmerksamkeit zu wenden, sie seinem Gedächtnisse einzuprägen: ihm steht es lediglich zu, die allgemeine Vorschrift, vorgelegte Aufgaben zu behandeln, diesem besondern Falle anzupassen, um so schlechthin durch sich selbst zu einer, ja dem Verfahren nach zu allen möglichen Auflösungen der fraglichen Aufgabe zu gelangen.

Kommt man nach diesen Vorarbeiten zu dem, was eigentlich den Gegenstand dieser Abhandlung ausmacht, so gebe man sich alle Mühe, den Sinn und den Umfang einer jeden Erklärung aufs deutlichste auseinanderzusetzen; übrigens mache man es sich aber zur Pflicht, beim Beweisen und Auflösen der Thätigkeit des Schülers, so lange sie von der Vernunft geleitet wird, nirgends vorzugreifen, ihm überall, wo mehrere Wege offen stehen, die freie Wahl, irgend einen derselben zu betreten, völlig zu überlassen. Jeden Beweis, jede Auflösung lasse man ihn mit Hülfe der in der Einleitung zu diesem Ende gegebenen allgemeinen Vorschriften aus

sich selbst entwickeln, und anfänglich wenigstens auf mehrere Arten abändern; damit er in jedem besondern Falle immer nur die eine Regel erblicke, und sich überzeuge, daß sie jedesmal zum Ziele führe, wenn man sich gänzlich ihrer Leitung überläßt. Dabei sey man bemüht, ihm bei seinen ersten Versuchen durch eingeschobene Fragen die Verkettung aller einzelnen Urtheile unter einander zu einem Ganzen zu erleichtern; aber bald gewöhne man ihn, sein eigener Führer zu seyn, sich selbst den zurückgelegten Weg deutlich zu bezeichnen, und die Mittel zum Weitergehen genau anzugeben. Wenn er während dieser Beschäftigung unbesonnen ausschweifet, so weise man ihn sogleich auf seinen frühern Standpunkt wieder zurück, und überführe ihn seines Fehltritts; steht er aber an irgend einer Stelle ohne zureichenden Grund stille, so sey man durch ruhige Aufmunterung darauf bedacht, daß er seine Besonnenheit nicht verliere, suche durch verdoppelte Aufmerksamkeit die Ursache dieser Störung zu entdecken, und dann aus dem Wege zu räumen, oder lasse ihn nöthigenfalls den zurückgelegten Weg noch einmal im Zusammenhange überblicken u. s. f., bis er wieder ungehindert vorwärts zu gehen im Stande ist. Wenn sich dem Gebrauche eines Beweis- oder Auflösungsmittels noch nicht erfahrne, jedoch abwendbare Hindernisse in den Weg legen, so zeige man ihm, wie sich diesem Uebelstande begegnen las-

se; welches an seinem Orte, wo eine Verbindung, Vermittlung, Vertheilung, Vermehrung oder Nachbildung eintreten mußte, ausführlich genug geschehen ist *). Die gänzliche Absonderung solcher Vorkehrungen, deren Anwesenheit immer nur in besondern Umständen ihren Grund hat, von der allgemeinen, unveränderlichen Beweis- und Auflösungsform ist für die Geometrie als Lehrgegenstand von großer Wichtigkeit. — Scheut man die Anstrengung nicht, welche diese Unterrichtsart im Anfange verursacht, so wird man bald über die Wirksamkeit derselben in Bewunderung gesetzt werden. Der Schüler wird so gerne in einem Elemente hausen, das allen seinen Kräften freien Spielraum läßt; er wird ohne große Mühe und Zeitaufwand die Gewandtheit erlangen, nach einem bezeichneten Orte in jeder beliebigen Richtung ohne alle fremde Hülfe

---

*) Daß alle hier gegebenen Vorschriften, im strengsten Sinne genommen, genau eingehalten werden können, davon wird sich der denkende, mit Unbefangenheit prüfende, Leser bald überzeugen. Den am Worte klebenden, von Vorurtheilen umstrickten dürfte auch eine nähere Hinweisung auf das Unterscheidende dieser Lehrart nicht zur Erkenntniß bringen; auf ihn ist nicht gerechnet. Übrigens bedarf es wohl kaum einer Erinnerung, daß Zusätze ganz wie Lehrsätze, Zugaben wie Aufgaben zu behandeln seyen; nur um Raum zu ersparen, hat man sich auf eine nähere Erörterung derselben nicht eingelassen.

sich zu bewegen, und nur selten werden vorfallende Hindernisse ihn in seinem Laufe zurückhalten.

In den Vorbereitungen hatte man zum Zweck, die Behandlungsweise eines jeden Gegenstandes in ihrer ganzen Allgemeinheit zu ergreifen, und daraus die Mannigfaltigkeit und Verschiedenartigkeit ihrer besondern Gestalten zu entwickeln, um so die Beschaffenheit einer gleichförmigen, ganz allein aus der Vernunft entspringenden, alle mögliche Fälle umfassenden Entstehungsart der Beweise und Auflösungen bildlich anzudeuten. Es lassen sich dem stets beweglichen, nach allen Seiten sich ergießenden menschlichen Geiste nirgends starre Schranken setzen; daher kann man auch nimmer von den in Formen gezwungenen Vorbereitungen fordern, daß sie ihren Gegenstand allseitig ergründen. Auch ist ihr Zweck nicht, daß der Leser sich pünktlich an sie halte und ihnen ängstlich folge; vielmehr sollen sie seine Denkkraft nur zur lebendigen Selbsterkenntniß zwingen, und ihn dadurch in den Stand setzen, forthin diese Leitung zu entbehren. Darum werden sie desto karger, je weiter sie sich von der ersten entfernen, je mehr sie durch ihre Aehnlichkeit mit schon vorhandenen überflüssig werden; ganz sind sie deßwegen nicht weggeblieben, damit der Leser die seinigen damit vergleichen, und nöthigenfalls sich Rath daraus erholen könne.

Es muß dem Schüler, während er den Beweis eines Satzes erzeugt, frei stehen, in dem einen Augenblick durch Synthese der Gründe zu den Folgen hinab, im andern durch Analyse der Folgen zu den Gründen hinauf zu steigen, — die Kette seiner Gedankenreihe zuletzt abzubrechen, dann wieder anzuknüpfen, — bald diesen, bald jenen Theil des werdenden Gebäudes näher ins Auge zu fassen, — hier eine Umänderung, dort eine gänzliche Ausscheidung zu veranstalten, wie es ihm gut dünkt. Ganz anders verhält es sich, wenn er den schon fertigen Beweis zur Ueberlieferung aufzeichnen soll; hier wird ununterbrochener Zusammenhang und möglichste Kürze gefordert. Genannte Eigenschaften besitzt ausschließlich die synthetische Form; deßwegen ist anfänglich überall, wo es nicht ganz überflüssig schien, ein synthetischer Beweis vollständig aufgestellt worden, in welchem der Anfänger, wenn er irgend wo in seinem eigenen Forschen hartnäckig aufgehalten werden sollte, Hülfe suchen kann. Jede Beweisfolge wird dabei durch einen Vernunftschluß erhalten, wozu die an ihrer Stirne stehenden, auf denselben Satz, in welchem sie stehen, sich beziehenden Zitaten den Nachsatz, die ihr angehängten hingegen, welche sich immer auf frühere Sätze beziehen, den Obersatz hergeben. Diese Darstellung vereinbart größte Strenge und Bündigkeit mit möglichster Kürze, und hat noch nebenbei den Vortheil daß sie dem Gedächtnisse nicht leicht zugänglich ist.

Auf ähnliche Weise muß dem Schüler, während er die Auflösung einer Aufgabe erzeugt, freie Beweglichkeit zugestanden werden; ist er aber mit der Auflösung zu Stande gekommen, und will er diese zur Ueberlieferung niederschreiben, so wird auch hier ununterbrochener Zusammenhang und möglichste Kürze gefordert. Eine solche Darstellung ist anfänglich, so lange es nöthig schien, beigefügt worden. Jede Auflösungsforderung wird dabei die Forderung einer Partialaufgabe, zu der die an ihrer Stirne stehenden, auf denselben Satz, in welchem sie stehen, sich beziehenden Zitaten die Angaben, die ihr angehängten hingegen die Auflösung dieser Partialaufgabe nachweisen.

Die der Geometrie als Unterrichtsmittel eigenthümliche, aus der Natur des menschlichen Geistes hergeleitete Lehrmethode zu beschreiben, war Hauptgegenstand dieser Arbeit, dem sich alle andern Rücksichten unterordnen mußten; daher wurde das Lehrgebäude der Geometrie selbst nicht weiter fortgeführt, als zu diesem Zwecke schlechterdings nothwendig war, eine vollständigere Ausarbeitung hätte mir höchst wahrscheinlich die öffentliche Verbreitung derselben unmöglich gemacht; daher verbreitete man sich über die Elementarsätze mit einer ungewöhnlichen Ausführlichkeit, hier muß der Keim feste Wurzel haben, soll die Pflanze nicht durch ihre eigene Schwere zu Boden gedrückt werden.

Von dem öffentlichen Urtheile sachkundiger, mit Umsicht prüfender Männer erwarte, wünsche ich möglichste Strenge und Gründlichkeit. Einzelne in das Wesen eingehende Unvollkommenheiten schmeichle ich mir um so weniger vermieden zu haben, als ein großer Theil dieser Schrift im Froste einer ungeheizten Stube oder in vertraulicher Unterredung mit Bekannten ans Licht getreten ist; da kann wohl von der Destillation von dem flüchtigen Stoffe etwas noch im Rückstande geblieben seyn. Michelsens sokratische Gespräche über Geometrie und Kiesewetters Lehrbuch der reinen Mathematik kenne ich genauer; Mathias heuristischen Unterricht und Hoffmanns geometrische Wissenschaftslehre nur aus der Ferne. Mit solchen Männern auf verschiedenen Wegen nach demselben Ziele zu streben, ist mir höchst erfreulich; willig räume ich, wo wir zusammentreffen, Ihnen das Feld.

Die Kritik dieser Bogen zu erleichtern, füge ich noch einige besondere Bemerkungen hinzu, die jedoch keineswegs Anspruch auf Gründlichkeit machen, weil meine Lage mir nicht erlaubt, vergleichende Untersuchungen mit der nöthigen Vollständigkeit anzustellen.

Zu §. 1.

Die an der Spitze dieses Paragraphen stehenden Erklärungen sind die obersten Beweismittel aller

auf die Vergleichung gerader Linien sich beziehenden Behauptungen, und doch werden sie meines Wissens in den Elementen der Geometrie immer nur stillschweigend vorausgesetzt. Der Grund hiervon liegt meines Erachtens in dem für Anfangsgründe allemal nachtheiligen Bestreben der Schriftsteller, diese ersten Begriffe so abstrakt hinzustellen, daß sie alle Arten und Gattungen der Raumgrößen in sich begreifen; dadurch wird aber der dem ersten Unterrichte angemessene Gang umgekehrt, und so dem Schüler das stetige Fortschreiten von einer niedern Sphäre zur höhern erschwert, wohl gar unmöglich gemacht.

Mehr noch als die erwähnten Erklärungen dürften die darauf folgenden Lehrsätze, welche die Stelle der geometrischen Grundsätze (Axiomen) einnehmen, Befremden erregen. Gegen die Richtigkeit und Bündigkeit ihrer Beweise wird man hoffentlich nichts einzuwenden haben, und wer gegen die Nothwendigkeit derselben argumentiren wollte, der vergleiche sie mit den später in der Lehre von den Dreiecken für ähnliche Sätze gegebenen, und weise den logischen Grund nach, warum diesen und nicht auch jenen das Bürgerrecht zuerkannt wird. Am allerwenigsten fürchte ich, nach dem was oben von dem Standpunkte des Schülers bei diesem Unterrichte gesagt worden ist, den Einwurf, daß Anfänger durch die Zergliederung so allgemein anerkannter Wahrheiten einen irrigen Begriff von der Wichtigkeit des Beweises erhalten könnten.

Zu §. 2.

Hier sind zwei Abweichungen von der herkömmlichen Sitte zu berücksichtigen. Einmal, daß die Auflösungen der Aufgaben ohne Beweis dastehen, was eine natürliche Folge des Zweckes, den man bei Ausarbeitung dieser Schrift vor Augen hatte, aber auch als formale Bedingung einer jeden Vernunftauflösung a priori entwickelt werden kann. Dann, daß Auflösungen hier geduldet werden, die sonst immer aus dem Gebiete der rationellen Geometrie verbannt worden sind, wohin z. B. die Art, eine Linie zu halbiren, gehört. Allein wenn diese nicht hierher gehören, wohin gehören sie denn? daß sie immer, obgleich nur näherungsweise, der Aufgabe Genüge leisten, also auf nothwendigen Gesetzen beruhen, wird wohl Niemand läugnen! Und wer behaupten wollte, daß in der Geometrie kein Verfahren geduldet werde, welches nur versuchsweise dem Ziele näher rückt, den frage ich, wie er wohl die Spitze seines Zirkels in einen gegebenen Punkt bringe; hier fällt noch dazu der Vortheil einer beständigen Näherung weg. —

Zu §. 3.

Der Kürze halber konnten hier ausser den Erklärungen nur einige der entbehrlichsten Sätze aufgestellt werden, an welche der Lehrer noch so viel andere reihen kann, als ihm zweckdienlich scheint. Auflösungen für verschiedene Aufgaben, als: mehrere gerade Linien in eine Summe zu vereinigen, eine

gerade Linie zu vervielfachen, das Verhältniß zweier gerader Linien zu bestimmen, das Maß einer gegebenen Linie nach einem gegebenen Gemäße zu finden, und anderer, erhält man leicht aus den für jene Begriffe gegebenen Erklärungen durch eine Wiederholung der in §. 2. stehenden Elementaraufgaben; deßwegen ist ihrer keine Erwähnung geschehen, dem ungeachtet sind sie mit dem Schüler durchzunehmen, weil in der Folge andere auf sie gebaut werden. Die hier für das Verhältniß zweier Linien zu einander gebildete Erklärung halte ich für die natürlichste und einfachste. Die Erklärung des Liniengemäßes hätte noch allgemeiner dargestellt werden können; sie schien mir aber, so wie sie ist, allen Anforderungen der geometrischen Kunst zu entsprechen. Durch die ausführlichere theoretische Behandlung der Gemäße wird, wie weiter unten sich offenbaren wird, eine Kluft ausgefüllt, die sonst immer zwischen der reinen und angewandten Geometrie eine Scheidewand bildete.

Zu §. 4.

Im Allgemeinen finden alle zu den drei vorhergehenden Paragraphen gefügten Bemerkungen hier von neuem eine Stelle; ausserdem sind aber noch einige besondere Umstände zu berücksichtigen. Es geben nämlich sowohl die in 53. stehende Anmerkung, als die in 52. und 56. vorhandenen Zusätze obigen Bemerkungen ein neues Gewicht; jene Anmerkung deutet auf die Nothwendigkeit einer wiederholten Begründung der Elementarsätze für jede

Art von Raumgrößen insbesondere; diese Zusätze, welche Theile eines organischen Ganzen sind, und von denen mehrere vorzugsweise fast immer bewiesen werden, verstärken die Behauptung, daß auch die übrigen Theile solcher Beweise bedürfen.

Zu §. 5.

Die Schwierigkeit in der subjektiven Behandlung dieser Materie, besonders des in 72 befindlichen Lehrsatzes, giebt eine Blöse in der objektiven Entwickelung derselben deutlich zu erkennen. Nach meiner Ueberzeugung ist diesem Uebelstande blos an der Quelle aller darauf Bezug habenden Begriffe abzuhelfen; daher halte ich alle Versuche, ihn mit Zuziehung der Eigenschaften völlig begrenzter Ebenen zu beseitigen, für fruchtlos, und gebe die Hoffnung noch nicht auf, mit einer systematischen Ableitung aller in der Einleitung berührten Gegenstände aus einem gemeinschaftlichen Principe, zugleich diesem Ziele näher zu rücken. Daß ich die Beurtheilung der Lage zweier Linien zu einander aus ihrer Lage zu einer dritten, und umgekehrt, umfassender vorgetragen habe, als gewöhnlich zu geschehen pflegt, wird wohl den Unterricht nicht erschweren.

Zu §. 6 bis 9 incl.

Hierin ist die Lehre von der Gleichheit und Ungleichheit der Linien und Winkel in Dreiecken mit mehr Ausführlichkeit, als in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Geometrie abgehandelt, und nur un-

gerne sah man sich gemüssigt, innerhalb der hier gesteckten Schranken zu bleiben. Es ist nicht einzusehen, aus welchem Grunde einem der in §. 8 oder §. 9 vorkommenden Lehrsätze ein größerer Vorzug eingeräumt werden sollte, als dem andern; sie sind alle in gleichem Grade einfach und fruchtbar, alle gleich unentbehrlich, wenn man nicht ein steifes, auf einseitigem Grunde ängstlich erbautes, Gebäude vor Augen hat.

Zu §. 10.

Die hier vorkommenden Auflösungen entspringen größtentheils aus sehr einfachen Betrachtungen, daher wurden sie meistens nur sehr kurz abgethan. Man hatte dabei keinen andern Zweck, als die gleichförmige Entstehungsart aller besondern Auflösungen mit Hülfe der einen allgemeinen Auflösungsmethode recht fühlbar zu machen. Die erste für die in 136. befindliche Aufgabe gegebene Auflösung hätte noch aus einem allgemeinern Gesichtspunkte betrachtet werden können. Von dem Dreiecke ABCA (Bild 67.) kennt man nämlich die Linie AC, die Linie BC und den rechten Winkel ABC; aus diesen gegebenen Stücken läßt sich das erwähnte Dreieck beschreiben, wodurch man dann die noch unbekannten Stücke findet. Diese allgemeinere Auflösung enthält nicht nur jene erste, sondern auch die für dieselbe Aufgabe vom Euklid überlieferte in sich. Die zweite daselbst gegebene Auflösung erinnere ich mich nicht, irgendwo noch gesehen zu haben; doch

zweifle ich sehr, daß dieses so einfache, auf so natürlichem Wege sich ergebende Verfahren dem forschenden Blicke der alten Geometer entgangen sey.

Zu §. 11.

Durch die gleichförmige Herleitung der Sätze von den Maßen, Verhältnissen und Vielfachen aus den entsprechenden Sätzen von der einfachen Vergleichung gerader Linien in Dreiecken wird der wissenschaftliche Ueberblick der ganzen Dreieckslehre ungemein erleichtert. Derselbe innere Zusammenhang läßt sich aber auch auf jedes andere Grundsystem ausdehnen, so daß die Lehre von den Maßen, Verhältnissen und Vielfachen unmittelbar aus der Lehre von der einfachen Vergleichung geschöpft werden kann; dieß schließt jedoch die Befugniß nicht aus, erstere da, wo es blos auf intellektuelle Bildung des Zöglings abgesehen ist, als ein von der andern unabhängiges Lehrsystem aufzustellen.

Zu §. 12.

So wie überall wird man auch hier die innige allseitige Berührung der Theorie und der Praxis bemerken, so daß, um von jener zu dieser zu gelangen, nur noch ein kleiner Schritt zu thun übrig bleibt; und eben dadurch beurkundet sich das wahre, vollendete theoretische Wissen.

Schließlich mache ich es mir zur Pflicht, den großen Einfluß meines Vaters, eines einfachen Bürgers, auf die Eigenthümlichkeit meiner wissenschaftlichen Bildung in kurzen Umrissen anzudeuten. Dabei habe ich nicht zur Absicht, seiner Person eiteln Weihrauch zu streuen; zu wähnen, ihm durch die öffentliche Anerkennung einen Theil meiner unermeßlichen Schuld abtragen zu können, hieße seiner Seelengröße Hohn sprechen; er trägt die Quelle der Vergeltung in seiner eigenen Brust. Auch wagt sich meine Feder nicht an die Schilderung der unbeschreiblichen Sorgfalt, der beispiellosen Beharrlichkeit, der unglaublichen Selbstverläugnung, womit er alle Annehmlichkeiten dieses Lebens meinem Glücke hingab; den Edlen trieb sein von Vaterliebe überströmendes Herz zu immer höhern Entschlüssen, und sein von unbedingtem Willen beflügelter Geist drang unaufhaltsam bis an die Schwelle der Unmöglichkeit. Aus seinem Leben führe ich an, was hierher gehört.

Durch den frühzeitigen Hang zu einer kunstlosen, über Gewinnsucht und Ruhmbegierde erhabenen Betrachtung des Menschen und der Natur hatte der unbefangene Mann die Fähigkeit erlangt, das Zeichen von der Sache, die Form von dem Wesen bestimmt und rein zu unterscheiden. Er sah mit banger Mißbilligung, wie in dem bürgerlichen Leben der anspruchslose Werth von dem geräuschvollen Scheine, der beglückende Gemeinsinn von der verderblichen Selbstliebe immer siegreicher bekämpft werde, brachte da-

mit die traurige Wahrnehmung in enge Verbindung, daß in der aufblühenden Jugend das rege Mitgefühl durch kalte Förmlichkeit, die intellektuelle Veredlung durch mechanische Geschwindigkeit immer gewaltsamer unterdrückt werde. Von der Unzulänglichkeit des herkömmlichen Unterrichtes zur Sicherstellung der Menschenwürde fest überzeugt, widmete der im Alter schon vorgerückte, mit der Ernährung seiner Familie anhaltend beschäftigte, nur durch nothdürftige Vorkenntnisse unterstützte und von jeder äußern Hülfe entblößte Handwerker mit einer Anstrengung und Ausdauer, die nur mit der Ungewöhnlichkeit seines Vorhabens in Vergleich gebracht werden können, fast alle seiner Ruhe und Erholung bestimmte Zeit dem Studium der Mathematik, Naturlehre und Philosophie, um auch darin mein Wegweiser zu werden. Die musterhafte Ausführung dieser kühnen und schwierigen Unternehmung, so weit es hier erforderlich ist, außer Zweifel zu stellen, setze ich den Anfang eines mir nach angetretenem fünfzehnten Jahre von Herrn Hofrath Langsdorf, damals Professor der Mathematik an der Universität zu Erlangen, ertheilten Zeugnisses wörtlich her:

„Der hiesige Schlossermeister Ohm faßte noch „in seinen spätern Jahren den rühmlichen Entschluß, Mathematik zu studiren und sich hierzu bei der ununterbrochenen Betreibung seines Metiers die nöthigen Stunden durch kärgliche Eintheilung seiner Zeit, d. h. durch fast

„gänzliche Verzichtleistung auf Erholungsstun-
„den, gleichsam zu stehlen. Neben seiner uner-
„sättlichen Wißbegierde hatte er zugleich den
„edlen, seinem Vaterherzen unendlich Ehre
„bringenden Zweck, seine beiden Söhne selbst
„in der Mathematik zu unterrichten. Dieß al-
„les ist ihm bis zur Bewunderung gelungen,
„wie ich mich — — — überzeugt habe.“

Seine Unverdrossenheit wuchs mit der Entwickelung seiner Kraft in gleichem Verhältnisse. Als sein Plan schon so weit gediehen war, daß ich die von ihm geebnete Strasse zur Noth allein hätte verfolgen können, sicherte mich doch stets noch seine Leitung vor Gefahr und Verirrung; wo ich blos anschauend und einsammelnd vorwärts gieng, hielt mich sein besorgter Ruf untersuchend und belehrend zurück. Mit einer räthselhaften Gewandtheit drang sein spähender Geist in die entlegensten Geheimnisse des Vernunftwissens, und schützte dadurch meine Jugend vor den vielen Klippen des gewöhnlichen mathematischen Unterrichtes. Damals war ich zwar noch nicht im Stande, den vollen Gehalt seiner Rathschläge und Forderungen ganz zu durchschauen; aber sie keimten im Verborgenen fort, und erhellten bei vorliegender Bearbeitung der Geometrie wie leuchtende Blitze aus der Vergangenheit die dunkeln Stellen. Wenn daher etwas Verdienstliches in der

Anlage dieser Schrift getroffen wird, ist es sein Werk, ich habe nichts weiter gethan, als seine Winke beachtet.

Bamberg, den 15. November 1816.

Der Verfasser.

Einleitung.

A. Begriff der Geometrie und Gattungen der Raumgrößen.

I. Alle Gegenstände des äußern Sinnes sind irgend wo. Dieses Wo eines Gegenstandes heißt sein Ort. Die wechselseitige Beziehung der Orte mehrerer Gegenstände auf einander wird ihre gegenseitige Lage genannt. Ein Gegenstand, an dem weiter nichts als sein Ort betrachtet wird, mag räumlicher Gegenstand heißen.

II. Eine Verbindung von räumlichen Gegenständen, worin die Lage jedes einzelnen in Bezug auf alle übrigen gänzlich bestimmt ist, heißt Raumsystem. Die Lehre von den Raumsystemen, Geometrie, lehret, wie die Beschaffenheit von gegebenen Raumsystemen erkannt, wie Raumsysteme von gegebener Beschaffenheit hervorgebracht werden.

III. Die stetige Veränderung des Ortes eines räumlichen Gegenstandes heißt seine Bewegung. Ein Raum-

system, welches alle Orte in sich faßt, die ein Gegenstand *) während seiner Bewegung einnimmt, nennt man Raumgröße.

IV. Ein einfacher räumlicher Gegenstand, der eine bloße Ortsbestimmung, keine Raumgröße ist, heißt Raumpunkt. Punkte liegen in einander, wenn sie eine und dieselbe Otsbestimmung ausdrücken; was daher von irgend einem Punkte wahr ist, gilt von allen solchen, die in diesem liegen.

V. Eine Raumgröße, welche durch die Bewegung eines Punktes erzeugt wird, heißt Raumlinie. Punkte liegen in dieser Linie, gehören ihr zu, wenn sie an irgend einer Stelle der Bewegung in dem beschreibenden Punkte liegen.

Die Linie wird auch Raumgröße der ersten Gattung oder Raumgröße von einer Dimension genannt.

VI. Eine Raumgröße, welche durch die Bewegung einer Linie erzeugt wird, heißt Raumfläche. Punkte liegen in dieser Fläche, gehören ihr zu, wenn sie an irgend einer Stelle der Bewegung in der beschreibenden Linie liegen. Linien liegen in einer Fläche, wenn alle ihre Punkte in derselben liegen.

Die Fläche wird auch Raumgröße der zweiten Gattung oder Raumgröße von zwei Dimensionen genannt.

In einem einzigen Falle wird durch die Bewegung einer Linie selbst wieder eine Linie hervorgebracht, wenn sich nämlich nur ein Punkt derselben erzeugend bewegt, alle übrigen hingegen immer wieder in Orte kommen,

*) So wie hier, wird späterhin immer, wo es keine Undeutlichkeit veranlassen kann, das bezeichnende räumlich oder Raum weggelassen werden.

in denen schon andere Punkte der beschreibenden Linie sich befanden; denn diese Art der Bewegung einer Linie kommt mit der eines Punktes völlig überein.

VII. Eine Raumgröße, welche durch die Bewegung einer Fläche erzeugt wird, heißt Raumkörper. Punkte liegen in diesem Körper, gehören ihm zu, wenn sie an irgend einer Stelle der Bewegung in der beschreibenden Fläche liegen. Linien oder Flächen liegen in einem Körper, wenn alle ihre Punkte in demselben liegen.

Der Körper wird auch Raumgröße der dritten Gattung oder Raumgröße von drei Dimensionen genannt.

Durch die Bewegung einer Fläche wird nur in dem Falle wieder eine Fläche erzeugt, wenn ausser den Punkten einer einzigen Linie, alle übrigen Punkte der beschreibenden Fläche in Orte kommen, in denen zuvor schon Punkte derselben waren. Auf gleiche Weise wird durch die Bewegung eines Körpers immer wieder ein Körper hervorgebracht, weil sich immer nur eine Fläche desselben erzeugend bewegt.

VIII. Ein räumlicher Gegenstand liegt in einem andern, wenn alle Punkte des erstern in Punkten des letztern liegen; außer einem andern, wenn kein Punkt des erstern in dem letztern liegt. Hieraus fließen folgende Sätze:

a) Wenn ein Gegenstand A in einem andern B, und dieser B wieder in einem andern C liegt, so liegt auch jener A in diesem C.

b) Wenn ein Gegenstand A ausser einem andern B liegt, so liegt auch dieser B außer jenem A.

IX. Ein Punkt liegt an einem andern, wenn sich jener aus seinem Orte in diesen ohne alle Zwi-

schenzustände bewegen läßt. Ein Punkt, der nicht in einem räumlichen Gegenstande liegt, liegt an demselben, wenn er an irgend einem Punkte desselben liegt.

X. Grenzpunkte sind solche Punkte einer Linie, an welchen nur nach einer Seite hin noch Punkte derselben Linie mehr liegen; Grenzlinien solche Linien einer Fläche, und Grenzflächen solche Flächen eines Körpers, an welchen nur nach einer Seite hin noch Punkte derselben Fläche oder desselben Körpers mehr liegen. Grenzpunkte, Grenzlinien und Grenzflächen haben auch den gemeinschaftlichen Namen Grenzen. Ein räumlicher Gegenstand liegt diesseits der Grenzen einer Raumgröße, wenn er zwar in derselben, aber nicht in ihren Grenzen liegt; jenseits, wenn er außer ihr liegt. Hieraus fließen folgende Sätze:

a) Ein räumlicher Gegenstand, welcher diesseits der Grenzen einer Raumgröße liegt, liegt auch diesseits der Grenzen einer jeden andern, in welcher jene liegt.

b) Ein räumlicher Gegenstand, welcher jenseits der Grenzen einer Raumgröße liegt, liegt auch jenseits der Grenzen einer jeden andern, die in jener liegt.

XI. Eine Raumgröße, welche nach allen Seiten hin Grenzen hat, heißt begrenzte Raumgröße oder räumliche Figur; wenn sie aber nach keiner Seite hin Grenzen hat, so wird sie unbegrenzt genannt. Die Figuren sind Linienfiguren, Flächenfiguren oder Körperfiguren, je nachdem die begrenzten Raumgrößen Linien, Flächen oder Körper sind. Die Grenzpunkte einer Linie heißen auch ihre Endpunkte. Der Inbegriff aller Grenzen einer Flächenfigur ist eine Linien-

figur, welche ihr **Umfang** genannt wird. Der Inbegriff aller Grenzen einer Körperfigur ist eine Flächenfigur, und heißt ihre **Oberfläche**.

XII. **Theil** einer Raumgröße ist jede Raumgröße derselben Gattung, deren Grenzen entweder alle diesseits der Grenzen der erstern, oder theils diesseits derselben, theils in denselben liegen. Jede Raumgröße wird in Bezug auf ihren Theil die **ganze** genannt. Solche Theile einer Raumgröße, welche alle Punkte der ganzen dergestalt in sich enthalten, daß kein diesseits der Grenzen irgend eines solchen Theils liegender Punkt zugleich diesseits der Grenzen irgend eines andern solchen Theils liegt, heißen **sich ergänzende** Theile jener ganzen Raumgröße. Hieraus fließen folgende Sätze:

a) Der Theil einer Raumgröße liegt in der ganzen.

b) Wenn ein räumlicher Gegenstand diesseits der Grenzen eines Theils liegt, so liegt er auch diesseits der Grenzen der ganzen Raumgröße.

c) Wenn ein räumlicher Gegenstand jenseits der Grenzen einer Raumgröße liegt, so liegt er auch jenseits der Grenzen ihrer Theile.

d) Wenn ein räumlicher Gegenstand diesseits der Grenzen eines Theils liegt, so liegt er jenseits der Grenzen aller jenen ergänzenden Theile.

XIII. Alle auf Raumsysteme sich beziehende Verrichtungen, welche die innere Beschaffenheit derselben auf keine Weise bedingen, sind in dem Gebiete der Geometrie, als schon anderwo begründet vorauszusetzen. Dahin gehören nicht nur solche, welche die ganzen Raumsysteme umfassen, ohne das Verhalten ihrer Bestandtheile unter einander dabei in Anspruch zu nehmen, sondern auch solche, welche einzelnen Punkten der Raumsysteme irgend ei-

ne besondere, weder das gegenseitige Verhalten dieser, noch das der übrigen Punkte derselben Raumsysteme beschränkende Bestimmung geben, weil in beiden Fällen das Wesen der Raumsysteme, d. i. die Lage aller ihrer Punkte gegen einander nicht beschränkt wird. Dergleichen sind:

a) Einen Punkt zu bewegen.

b) Irgend ein Raumsystem zu bewegen.

c) Einen Punkt in einen andern von jenem unabhängigen zu legen.

d) Irgend einen Punkt eines Raumsystems in einen andern von dem Raumsysteme unabhängigen zu legen.

e) Einen Punkt längs einer, von diesem Punkte unabhängigen Linie hin zu bewegen.

f) Eine Linie an einem von ihr unabhängigen Punkte hin zu bewegen.

g) Irgend einen Punkt eines Raumsystems längs einer von dem Raumsysteme unabhängigen Linie hin zu bewegen.

h) Irgend eine Linie eines Raumsystems an einem von dem Raumsysteme unabhängigen Punkte hin zu bewegen.

i) Ein Raumsystem um einen oder auch um zwei seiner Punkte zu drehen.

XIV. Alle Raumgrößen sind in uns entstanden; werfen wir aber unsern Blick in die Außenwelt, so werden wir gewahr, daß es da keine Punkte, keine Linien, keine Flächen gibt. Alles, was sich unsern Sinnen als ein für sich Bestehendes darstellt, ist ein Körper; das Sonnenstäubchen so gut, wie der ganze Erdball. Und selbst diese Körper entsprechen den Raumkörpern nicht vollkommen, weil sie außer ihren Ort noch viele andere

Merkmale in sich enthalten; sie werden daher zur Unterscheidung von jenen physische Körper genannt.

XV. Sinnliche Darstellungen der Raumsysteme sind daher nichts anders als Bilder, die den Begriff nie ganz erreichen können, die ihm aber um so näher kommen, je weniger sie zufällige Merkmale enthalten, je reiner sie die wesentlichen ausdrücken. So werden Punkte durch Ecken physischer Körper oder durch solche Körper abgebildet, deren drei Dimensionen so gering sind, daß man berechtigt ist, sie außer Acht zu lassen. Linien werden durch Kanten physischer Körper oder durch solche Körper abgebildet, deren zwei Dimensionen gegen die dritte vor den Sinnen verschwinden. Flächen durch Oberflächen physischer Körper oder durch solche Körper, deren eine Dimension mit den beiden andern nicht in Vergleichung kommt.

XVI. Umgekehrt, wenn Begriffe der Raumlehre auf Dinge der Außenwelt übergetragen werden sollen, so kann dieß nicht anders als durch eine bildliche Darstellung derselben geschehen, welche dem Begriffe um so mehr entspricht, je mehr sich die Bilder den vorgestellten Raumsystemen nähern. Eben deßwegen liegt es dem practischen Künstler ob, nicht nur auf Mittel zu sinnen, diese Annäherung so weit als möglich zu treiben, sondern auch sich in den Besitz derjenigen Kenntnisse zu setzen, durch die er in den Stand gesetzt wird, die jedesmalige mögliche Abweichung des Bildes von dem Begriffe zu bestimmen; einestheils, damit er nicht mehr von seiner Arbeit erwarte, als sie zu leisten fähig ist; anderntheils, um überzeugt zu seyn, daß er den erforderlichen Grad der Genauigkeit in jedem einzelnen Falle durch seine Vorkehrungen wirklich erreiche.

B. Arten der Raumgrößen und Theile der Geometrie.

XVII. Eine Linie heißt gerade, wenn sie auf allen Seiten eine und dieselbe Beschaffenheit hat. Hieraus fließen folgende Sätze:

a) Alle Punkte einer geraden Linie verharren in ihren Orten, auch wenn sich diese um ihre beiden Endpunkte bewegt; daher ist zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie möglich.

b) Wenn alle Punkte einer Linie, die sich um ihre beiden Endpunkte bewegt, immer dieselben Orte einnehmen, so ist es eine gerade Linie; daher ist jede Linie, die in einer geraden liegt, mithin auch jeder Theil einer geraden Linie, selbst gerade.

c) Gerade Linien, welche einen gemeinschaftlichen Theil haben, bilden nur eine einzige gerade Linie; dasselbe geschieht daher auch sobald gerade Linien nur zwei Punkte gemeinschaftlich haben.

d) Zwei gerade Linien, welche nicht eine einzige gerade ausmachen, können höchstens einen Punkt miteinander gemein haben, dann sagt man, die Linien schneiden sich, und nennt den gemeinschaftlichen Punkt ihren Durchschnittspunkt; wenn daher zwei gerade Linien in zwei andern sich schneidenden liegen, so liegt auch der Durchschnittspunkt jener in dem Durchschnittspunkte dieser.

XVIII. Die Richtungen mehrerer gerader Linien liegen in einander, wenn diese Linien in einer und derselben unbegrenzten geraden Linie liegen. Gerade Linien, deren Richtungen in einander liegen, liegen auf einander, wenn sie einen Theil gemeinschaftlich haben; neben einander, wenn sie keinen

Theil gemeinschaftlich haben. Hieraus fließen folgende Sätze:

a) Gerade Linien, von denen die eine in der andern liegt, liegen auch auf einander.

b) Wenn die Richtungen zweier gerader Linien in einer dritten liegen, so liegen sie selbst in einander; wenn daher die Richtungen zweier gerader Linien in einander liegen, so liegen alle Richtungen, die in diesen liegen, auch in einander.

c) Wenn irgend zwei Theile zweier gerader Linien auf einander liegen, so liegen auch die ganzen auf einander.

d) Wenn von drei geraden Linien, die alle einen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, zwei auf der dritten liegen, so liegen auch diese beiden auf einander.

e) Wenn die einen Theile zweier gerader Linien so auf einander liegen, daß diejenigen Endpunkte derselben in einander liegen, welche zugleich Endpunkte solcher Theile sind, die neben diesen liegen, so liegen auch diese andern Theile auf einander.

XIX. Eine Fläche heißt eben, wenn sie auf beiden Seiten eine und dieselbe Beschaffenheit hat. Eine ebene Fläche wird auch Ebene genannt. Hieraus fliessen folgende Sätze:

a) Wenn zwei Punkte einer geraden Linie in einer Ebene liegen, so liegt sie ganz in ihr; daher ist durch zwei sich schneidende Linien nur eine Ebene möglich.

b) Wenn eine Fläche in allen ihren Theilen so beschaffen ist, daß eine gerade Linie ganz in ihr liegt, sobald zwei Punkte derselben in ihr liegen, so ist es eine Ebene; daher ist jede Fläche, die in einer Ebe-

ne liegt, mithin auch jeder Theil einer Ebene, selbst eine Ebene.

c) Ebenen, welche einen gemeinschaftlichen Theil haben, bilden nur eine einzige Ebene; dasselbe geschieht daher auch, sobald sie nur drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, gemeinschaftlich haben.

d) Zwei Ebenen, die nicht eine einzige Ebene bilden, können höchstens eine einzige gerade Linie mit einander gemein haben, dann sagt man, die Ebenen schneiden sich, und nennt die gemeinschaftliche gerade Linie ihre Durchschnittslinie; wenn daher zwei Ebenen in zwei andern sich schneidenden liegen, so liegt auch die Durchschnittslinie jener in der Durchschnittslinie dieser.

XX. Die Richtungen mehrerer Ebenen liegen in einander, wenn diese Ebenen in einer und derselben unbegrenzten Ebene liegen. Ebenen, deren Richtungen in einander liegen, liegen aufeinander, wenn sie einen Theil gemeinschaftlich haben; neben einander, wenn sie keinen Theil gemeinschaftlich haben. Hieraus fließen folgende Sätze:

a) Ebenen, welche in einander liegen, liegen auch auf einander.

b) Wenn die Richtungen zweier Ebenen in einer dritten liegen, so liegen sie selbst in einander; wenn daher die Richtungen zweier Ebenen in einander liegen, so liegen alle solche, die in diesen liegen, auch in einander.

c) Wenn irgend zwei Theile zweier Ebenen auf einander liegen, so liegen auch die ganzen auf einander.

d) Wenn zwei Ebenen in einer dritten liegen, und alle

drei eine Grenzlinie mit einander gemein haben, so liegen jene beiden auf einander.

e) Wenn die einen Theile zweier Ebenen so auf einander liegen, daß diejenigen Grenzlinien derselben auf einander liegen, welche zugleich Grenzlinien solcher Theile sind, die neben diesen liegen, so liegen auch diese andern Theile auf einander.

XXI. Die eben betrachteten Eigenschaften gerader Linien und ebener Flächen führen zu nachstehenden räumlichen Verrichtungen, die sich sämmtlich auf die schon oben angegebenen gründen:

a) Eine gerade Linie zu beschreiben.

b) Gerade Linien dergestalt auf oder neben einander zu legen, daß ein Endpunkt der einen in einem Endpunkte der andern liege.

c) Durch zwei gegebene Punkte eine gerade Linie zu legen.

d) Eine gerade Linie längs einer andern hin zu bewegen.

e) Eine gerade Linie nach einer Seite hin zu verlängern.

f) Eine gerade Linie in eine Ebene zu legen.

g) Eine gerade Linie längs einer Ebene hin zu bewegen.

h) Eine Ebene zu beschreiben.

i) Zwei Ebenen dergestalt auf oder neben einander zu legen, daß von jeder Ebene eine gerade Grenzlinie auf einander, und von jeder Grenzlinie ein Punkt in einander liegen.

k) Durch drei Punkte eine Ebene zu legen.

l) Eine Ebene längs einer andern hin zu bewegen.

m) Eine Ebene nach einer Seite hin zu verlängern.

n) Eine gerade Linie in einer Ebene um einen ihrer Punkte zu bewegen.

XXII. Eine Linie ist an einem ihrer Punkte ungerade, wenn dieser Punkt mit seinem nächst vorhergehenden und nächst folgenden nicht in einer geraden Linie liegen kann, d. h. wenn die Bewegung des beschreibenden Punktes in diesen drei auf einander folgenden Zuständen nicht geradlinig ist. Eine Linie ist von Punkt zu Punkt ungerade, wenn sie an jedem Punkte, den man sich vorstellen mag, ungerade ist. Eine krumme Linie wird diejenige genannt, welche von Punkt zu Punkt ungerade ist.

XXIII. Das Raumsystem, welches entstehet, indem sich eine begrenzte gerade Linie in einer Ebene um den einen ihrer Endpunkte bewegt, wird Kreis genannt. Der unbewegliche Endpunkt der beschreibenden Linie heißt der Mittelpunkt des Kreises, und die krumme Linie, welche durch ihren andern Endpunkt beschrieben wird, nennt man Kreislinie. Jeder Theil der Kreislinie wird Bogen genannt. Eine gerade Linie, vom Mittelpunkte bis zu irgend einem Punkte der Kreislinie gezogen, heißt Halbmesser, Radius. Eine gerade Linie, deren beide Endpunkte in der Kreislinie liegen, heißt Sehne, und geht die Sehne durch den Mittelpunkt, so heißt sie Durchmesser. Eine gerade Linie, welche auf der Ebene des Kreises liegt, und deren einer Endpunkt in der Kreislinie, der andere aber ausser ihr liegt, heißt Sekante. Eine gerade Linie, welche durch einen Punkt der Kreislinie geht, von der aber kein Punkt, auch wenn man sie nach beiden Seiten verlängerte, diesseits der Kreislinie liegt, wird Tangente genannt.

Die Beschaffenheit der Kreislinie führt zu folgender räumlichen Verrichtung, die sich auf die (in XXI. n.) gegebene gründet: Um einen gegebenen Mittelpunkt in einer gegebenen Ebene mit einem gegebenen Radius eine Kreislinie zu beschreiben.

Da die Kreislinien mit den geraden die gleiche Beschaffenheit in allen ihren Theilen gemein haben, so bilden sie den Uebergang von den geraden zu den krummen Linien.

XXIV. Eine Fläche ist an einer ihrer Linien uneben, wenn diese mit ihrer nächst vorhergehenden und nächst folgenden keine Ebene bildet. Eine Fläche ist von Linie zu Linie uneben, wenn sie an jeder Linie, die man sich vorstellen mag, uneben ist. Eine krumme Fläche wird diejenige genannt, welche von Linie zu Linie uneben ist.

XXV. Eine krumme Fläche ist eine Kreisfläche, wenn die beschreibende Linie eine gerade ist und alle ihre Punkte Kreislinien beschreiben, oder wenn die beschreibende Linie eine Kreislinie ist, deren Punkte alle gerade Linien beschreiben, oder endlich wenn die beschreibende Linie eine Kreislinie ist und alle ihre Punkte wieder Kreislinien beschreiben. So wie die Kreislinien zwischen den geraden und krummen Linien, so liegen die Kreisflächen in der Mitte zwischen den ebenen und krummen Flächen.

XXVI. Derjenige Theil der Geometrie, welcher sich mit Linien, die entweder gerade oder Kreislinien sind; mit Ebenen und Kreisflächen, deren Grenzen Linien der gedachten Art sind; mit Körpern, deren Grenzen Flächen der gedachten Art sind, beschäftigt, heißt niedere Geometrie.

Derjenige Theil der Geometrie, welcher sich mit krummen Linien und Flächen aller Art, und mit Kör-

pern, welche durch solche Flächen begrenzt sind, beschäftigt, heißt höhere Geometrie.

XXVII. Ein Raumsystem, dessen Punkte alle in einer geraden Linie liegen, heißt Liniensystem; wenn aber nicht alle Punkte desselben in einer geraden Linie, jedoch in einer Ebene liegen, so heißt es Flächensystem; wenn endlich die Punkte desselben nicht in einer einzigen Ebene liegen, so wird es Körpersystem genannt. Hiernach theilt sich die niedere Geometrie

a) in die Lehre von den Liniensystemen, Longimetrie,
b) in die Lehre von den Flächensystemen, Planimetrie,
c) in die Lehre von den Körpersystemen, Stereometrie.

C. Methode der Geometrie.

XXVIII. Die geometrische Methode zeichnet sich vor denen der übrigen rationellen Lehren vorzüglich dadurch aus, daß sie ihre Begriffe innig mit sinnlichen Bildern verwebt. Es scheint zwar, als ob dadurch ihre Allgemeinheit gefährdet und sie selbst zu einer empirischen Verfahrungsart herabgewürdigt würde, (welches in der That der Fall ist, sobald den Bildern ein zu großer Wirkungskreis gestattet wird); allein dieser Schein verschwindet, wenn wir die Grenzen des Bildergebäudes scharf bezeichnen, und die Festigkeit der Pfeiler, auf denen dasselbe ruht, sorgfältig untersuchen. Die Bilder, deren sich die Geometrie zur Versinnlichung ihrer Begriffe bedient, sind zwar nicht blos todte Zeichen, die

verstanden werden müssen, um Gehalt zu bekommen, sondern sie liefern einen Begriff unmittelbar in einer Anschauung; ihre Bedeutsamkeit aber erstreckt sich nur bis in eine bestimmte Ferne, in der sie weder die Allgemeinheit des Begriffs zu schwächen, noch seine Deutlichkeit zu trüben im Stande sind. Dadurch gelangt die geometrische Methode, ohne der Gründlichkeit im geringsten zu schaden, zu einem so hohen Grade der Lebhaftigkeit und Kürze, wodurch sie sich vor allen andern so vortheilhaft auszeichnet.

XXIX. Ein Gegenstand des äußern Sinnes ist eben so unfähig, sehr besondere Bestimmungen eines Begriffs deutlich anzugeben, als er unvermögend ist, sehr allgemeine Merkmale desselben auszudrücken; erstere lassen sich leicht mit den unbestimmbar vielen, die blos dem Gegenstande, nicht dem Begriffe angehören, verwechseln, oder sie erfordern eine gänzliche Zergliederung des Gegenstandes, so daß sie nicht mit Leichtigkeit an demselben wahrgenommen werden können; letztere lassen sich hingegen oft nicht einmal mit dem Gegenstande vereinbaren. Aus diesem Grunde sind auch die Bilder in der Geometrie zur Versinnlichung sehr vieler Begriffe und ihrer Merkmale ungeschickt. — Wie ließe sich wohl das Bild einer Linie entwerfen, von der unausgemacht bleiben soll, ob sie eine gerade oder krumme ist? denn wie man es auch anfangen wollte, so würde doch das Bild entweder blos eine gerade, oder blos eine krumme, oder eine solche darstellen, die aus einer geraden und krummen zusammengesetzt wäre; jedes von diesen Bildern entspräche aber obigem Begriffe nicht in seinem ganzen Umfange. Eben so wenig läßt sich blos an dem Bilde erkennen, daß z. B. die eine Linie eines Raumsystems zweimal so groß seyn soll, als eine andere; denn

schon um dieses Merkmal aufzufinden, wird eine bestimmte Vergleichung beider Linien unter einander erfordert, die doch selbst erst wieder eine, zufälliger Weise dahin gerichtete, innere Thätigkeit voraussetzt; und wer bürge denn dafür, daß das so gefundene Merkmal wirklich dem Begriffe zugehöre, oder ob es nicht blos eine zufällige Beschaffenheit des Bildes sey!

XXX. Es giebt aber gewisse Merkmale, die das Bild mit vollkommener Deutlichkeit und Bestimmtheit unmittelbar durch eine Anschauung in dem Gemüthe zu erwecken im Stande ist. Diese sind:

a) Die Art der Theile*) eines Raumsystems. Ob man sich eine Linie gerade oder krumm, eine Fläche eben oder krumm vorzustellen habe, dieß kann man mit voller Sicherheit dem Bilde überlassen; vorausgesetzt, daß man sich in jedem Falle des geeigneten Bildes bediene.

b) Die Anzahl der Theile eines Raumsystems. Daß man sich ein Raumsystem aus fünf Theilen bestehend vorstelle, dazu wird nichts weiter erfordert, als daß man das Bild desselben aus fünf, jenen Theilen entsprechenden Bildern zusammensetze.

c) Die äußere Beziehung der Theile eines Raumsystems zu einander; ob nämlich der eine in oder außer dem andern liege. Hierzu wird weiter nichts erfordert, als daß man die Bilder in dieser Hinsicht sich eben so zu einander verhalten lasse, wie es von den durch sie zu erweckenden Begriffen verlangt wird.

*) Unter Theil eines Raumsystems wird jeder in demselben besonders bestimmte Punkt, oder Linie, oder Fläche, oder Körper verstanden.

Die genannten Merkmale werden von den Geometern mit allem Rechte ganz dem Bilde anvertraut, da dasselbe im Stande ist, sie vollkommen zu erwecken; ausser ihnen aber keine, und man hat sich sehr in Acht zu nehmen, daß man nicht in Versuchung gerathe, von dem Bilde andere, z. B. die Vergleichung der Größe oder der gegenseitigen Lage der Theile eines Raumsystems, abnehmen zu wollen. Dagegen dürfen aber auch keine Bilder gebraucht werden, sobald jene Merkmale nicht mit voller Bestimmtheit in dem Begriffe eines Raumsystems ausgedrückt sind; es sey denn, daß man in diesem Falle während des Gebrauchs der Bilder mit äußerster Vorsicht darüber wache, daß solche unentschiedene Merkmale im Verlaufe der Betrachtung nicht als entschieden angenommen werden.

XXXI. Außer den angeführten Merkmalen der Raumsysteme, werden alle übrigen in der Geometrie, wie in jeder andern rationellen Lehre durch Worte oder sonstige Zeichen ausgedrückt. Deßwegen haben die Bilder der Geometrie auf alle übrigen Merkmale der Systeme keine Rücksicht zu nehmen, auch wenn sie dieselben in sich aufzunehmen fähig sind. Wenn die rationelle Geometrie z. B. den Begriff eines gleichseitigen Dreiecks hervorrufen will, so bildet sie ein Dreieck, und fügt noch das Merkmal gleichseitig in Worten oder andern Zeichen hinzu, unbekümmert, ob in dem Bilde die 3 Seiten auch wirklich einander gleich seyen, oder nicht; denn die durch das Bild gegebenen Merkmale machen mit dem letztern zusammengenommen den vorgelegten Begriff aus. Auf solche Weise erhalten die Gegenstände der Geometrie gleichsam ihr Gerippe von der Sinnlichkeit, alle ihre übrigen Theile sind dagegen geistigen Ursprungs;

daher ist diese Lehre auch unter allen andern am geschicktesten, den Uebergang von dem Sinnlichen zu dem Geistigen zu bahnen, den gearteten Menschen aus der dunkeln Region des Nachbetens und Nachahmens bis an den lichten Gipfel des freien Denkens und Handelns zu heben.

XXXII. Derjenige Begriff, welcher keine andern als die (in XXX.) aufgezählten Merkmale eines Raumsystems enthält, mag **Grundsystem** desselben heißen; es läßt sich demnach das Grundsystem immer vollständig in einem Bilde darstellen. Die noch übrigen Merkmale, welche den Theilen der Raumsysteme in dem Subjekte eines Satzes beigefügt werden, sollen **Gründe des Satzes**, und die, welche den Theilen derselben Raumsysteme in den Prädikaten des Satzes zugeschrieben werden, sollen **Folgen des Satzes** heißen. Auf gleiche Weise mögen diejenigen Merkmale, welche nicht in den Grundsystemen enthalten sind, und in einer Aufgabe bekannten Theilen der Raumsysteme beigelegt werden, **Angaben**, und diejenigen, welche an gesuchten Theilen derselben Raumsysteme erst erzeugt werden sollen, **Forderungen** der Aufgabe heißen. Bei dem Beweise eines Satzes hat daher die Geometrie an den Grundsystemen nachzuweisen, wie aus dem Einflusse der Gründe auf dieselben die Folgen nothwendig hervorgehen; und bei der Auflösung einer Aufgabe zu zeigen, wie sich an den Grundsystemen die Forderungen der Aufgabe mit ihren Angaben vereinigen lassen. Hierin liegt eigentlich der Vorzug und die Eigenthümlichkeit, welche der geometrischen Methode im Gegensatze mit andern eingeräumt werden müssen; denn dadurch, daß das Grundsystem keiner weitern Zergliederung durch den Verstand mehr bedarf, erspart sich das

geometrische Verfahren häufig die theilweise Betrachtung der meisten Merkmale eines Begriffs.

XXXIII. Die geometrische Methode, wie die Methode jeder andern synthetisch rationellen Lehre, geht übrigens aus von Begriffen, die sie erklärt; kommt zu Lehrsätzen, die sie beweiset; von da zu Aufgaben, die sie auflöset. Zusätze sind Sätze, die aus andern, denen sie angehängt werden, ohne Schwierigkeit hervorgehen; Zugaben solche Aufgaben, deren Auflösung sich aus andern, denen sie angehängt werden, sogleich ergiebt. Anmerkungen dienen dazu, einzelne Stellen der Sätze oder Aufgaben noch näher ins Licht zu setzen.

Ein Begriff ist erklärt, wenn seine Merkmale so mit einander verbunden werden, daß dadurch genau derselbe Begriff entstehet; die Erklärung ist daher ein Satz, in welchem Gründe und Folgen mit einander verwechselt werden können. Vollkommen erklärt wäre ein Begriff, wenn in der Erklärung nichts als einfache Merkmale vorkämen. — Ein Lehrsatz *) ist bewiesen, wenn dargethan ist, daß die Merkmale der Prädikate in denen des Subjekts enthalten sind. — Eine Aufgabe ist aufgelöset, wenn gezeigt worden ist, wie sich der in ihr aufgestellte Begriff aus einfachern zusammensetzen läßt. — Könnte man daher mit Leichtigkeit jeden Begriff vollkommen erklären, so hieße beweisen nichts anders, als zeigen, daß die einfachen Merkmale der Folgen alle in denen der Gründe des Satzes enthalten sind; auflösen nichts anders, als nachweisen, wie die einfachen Merkmale der Forderungen mit denen der Angaben zusammenhängen.

*) Der Kürze halber werden hier unter Lehrsätzen nur allgemein bejahende, nicht disjunktive Sätze verstanden.

Allein die oft grenzenlose Verzweigung vollkommener Erklärungen macht das eben angeführte Verfahren beim Beweisen und Auflösen in den meisten Fällen unbrauchbar; weßwegen man zu nachstehendem Mittel seine Zuflucht nehmen muß.

XXXIV. Ein Begriff, welcher einen andern in sich enthält, begreift auch jeden solchen in sich, der in dem letztern enthalten ist. Auf diesen logischen Satz stützen sich nachstehende Betrachtungen:

a) Wenn die Grundsysteme sowohl als die Gründe irgend eines Satzes, dessen Wahrheit keinem Zweifel mehr unterliegt, in den Grundsystemen und den Gründen eines unerwiesenen Lehrsatzes enthalten sind, so sind auch die Folgen des erstern Satzes in den Gründen des letztern enthalten. Jede Folge dieses Lehrsatzes ist daher erwiesen, wenn gezeigt werden kann, daß sie in seinen Gründen und in den Folgen des erstern Satzes enthalten ist. Solche unbezweifelte Sätze mögen Folgerungsmittel und ihre Folgen Beweisfolgen des Lehrsatzes heißen.

b) Wenn die Grundsysteme irgend eines Satzes, dessen Wahrheit keinem Zweifel mehr unterliegt, in den Grundsystemen eines unerwiesenen Lehrsatzes enthalten sind, und in den Folgen des erstern eine oder mehrere Folgen des letztern vorkommen, so sind diese Folgen auch in den Gründen des erstern Satzes enthalten. Diese Folgen sind daher erwiesen, wenn gezeigt werden kann, daß die Gründe des erstern Satzes in denen des letztern enthalten sind. Solche unbezweifelte Sätze mögen Begründungsmittel und ihre Gründe Beweisgründe des Lehrsatzes heißen.

Beide, Folgerungs- und Begründungsmittel sollen **Beweismittel** heißen. Es ist leicht einzusehen, daß die ersten Beweismittel immer Erklärungen seyn müssen.

XXXV. Die vorhergehenden Betrachtungen bahnen nunmehr den Uebergang zu folgenden Beweisarten:

a) Man sucht aus den Gründen des zu erweisenden Lehrsatzes durch Folgerungsmittel Beweisfolgen zu erhalten. Aus diesen Beweisfolgen allein, oder in Verbindung mit den Gründen des Lehrsatzes leitet man durch andere Folgerungsmittel wieder andere Beweisfolgen her, u. s. f., bis alle Folgen des Lehrsatzes unter den so erhaltenen Beweisfolgen gefunden werden. Diese Beweisart heißt die **synthetische**.

b) Man sucht für die Folgen des zu erweisenden Lehrsatzes durch Begründungsmittel Beweisgründe zu erhalten. Für diese Beweisgründe allein, oder in Verbindung mit den Folgen des Lehrsatzes sucht man durch andere Begründungsmittel neue Beweisgründe auf, u. s. f., bis alle letzten *) Beweisgründe unter den Gründen des Lehrsatzes getroffen werden. Diese Beweisart wird die **analytische** genannt.

c) Man führt den Beweis theils synthetisch, theils analytisch, bis die letzten Beweisgründe des Lehrsatzes in seinen Beweisfolgen oder Gründen gefunden werden. Diese Beweisart mag die **synthetisch-**

*) Unter letzten Beweisgründen werden solche verstanden, statt deren durch Begründungsmittel nicht wieder neue gesetzt worden sind. In diesem Sinne gehören dahin auch Folgen, wenn statt ihrer noch keine Beweisgründe gesetzt worden sind.

analytische heißen; sie verdient ihrer Allgemeinheit wegen den Vorzug vor den beiden andern.

Man nennt das eben auseinander gesetzte Verfahren, sich von der Wahrheit eines Lehrsatzes zu überzeugen, das direkte, im Gegensatze mit demjenigen, welches noch betrachtet werden wird. Zu seiner Möglichkeit wird erfordert, daß der einfachere Satz dem zusammengesetztern vorangehe, weil ausserdem keine Beweismittel vorhanden seyn könnten. Eine solche Anordnung der Sätze heißt ein Lehrsystem; der Gang der rationellen Geometrie muß daher systematisch seyn.

XXXVI. Außer der direkten Beweisart giebt es noch ein anderes Verfahren *), welches auf den logischen Satz des Widerspruchs gegründet ist, und im Gegensatze mit jenem das indirekte genannt wird. Auch bei diesem können drei verschiedene Wege betreten werden:

a) Man füge nach und nach jede unerwiesene Folge des Lehrsatzes widersprechend zu seinen Gründen. Bemerkt man nun, daß jede solche Zusammenstellung frühern Sätzen widerspricht, so giebt dieser Umstand die Wahrheit des fraglichen Lehrsatzes zu erkennen **).

*) Es wird hierbei, wie überall, vorausgesetzt, was auch erlaubt ist, daß dem Subjektbegriffe eines jeden Satzes logische Möglichkeit zugestanden werden müsse.

**) Diese Art zu beweisen wird in der Folge die rein indirekte genannt, und ihrer großen Einfachheit wegen immer nur durch diese Benennung angedeutet. Sie wird überflüssig, wenn man die logischen Bedingungen kennt, unter welchen sich allgemein bejahende nicht disjunktive Urtheile rein umkehren lassen, deren Angabe aber hier nicht Platz finden kann.

b) Man beweise, so lange es angeht, direkt fort. Lassen sich hierauf die letzten Beweisgründe aus den Beweisfolgen und den Gründen des Lehrsatzes auf die eben angeführte Art indirekt nachweisen, so ist eben dadurch die Wahrheit desselben dargethan.

c) Man füge nach und nach jede unerwiesene Folge des Lehrsatzes widersprechend zu seinen Gründen, und leite nach der direkten Beweisart Beweisfolgen ab. Stößt man nun dabei jedesmal auf solche, die entweder mit den übrigen Beweisfolgen, oder mit den Gründen desselben Lehrsatzes nicht zusammen gedacht werden können, so ist auch dann noch der aufgestellte Lehrsatz für wahr zu halten.

XXXVII. Jeder Begriff, der in einem andern enthalten ist, wird zugleich mit diesem hervorgebracht. Dieser logische Satz führt zu nachstehender Betrachtung: Wenn eine oder mehrere Forderungen einer aufzulösenden Aufgabe in irgend einem Satze, dessen Grundsysteme in denen der Aufgabe enthalten sind, und dessen Wahrheit keinem Zweifel unterliegt, als Folgen vorkommen, und es lassen sich die gesuchten Theile nach Anleitung der Gründe hervorbringen, so werden sie eben dadurch gedachten Forderungen gemäß konstruirt. Solche Sätze mögen **Auflösungsmittel** und ihre Gründe **Auflösungsforderungen** der Aufgabe heißen.

XXXVIII. Die vorhergehende Betrachtung giebt folgende Auflösungsart an die Hand: Wenn die gesuchten Theile sich nicht sogleich mittelst schon gelöseter Aufgaben den Forderungen gemäß konstruiren lassen, so suche man durch Auflösungsmittel statt dieser Forderungen Auflösungsforderungen zu erhalten. Lassen sich hierauf die gesuchten Theile den so erhaltenen Auflösungsforderungen gemäß konstruiren, so ist durch sie die Auflösung der Auf-

gabe gegeben. Ist dieß aber nicht der Fall, so betrachte man diese Auflösungsforderungen selbst wieder als Forderungen der Aufgabe, suche für sie durch andere Auflösungsmittel neue Auflösungsforderungen, u. s. f., bis sich die gesuchten Theile den letzten *) Auflösungsforderungen gemäß konstruiren lassen.

Es erhellet hieraus, daß die rationelle Kunst die Wissenschaft voraussetze.

D. Bezeichnung der Grundsysteme.

XXXIX. Damit aber die Bilder der Grundsysteme den beabsichtigten Begriff in uns erwecken, müssen sie vor den Sinn, auf welchen sie wirken sollen (gemeiniglich das Gesicht) geführt werden. Dieß geschieht entweder durch unmittelbares Hinweisen auf das Bild, oder noch gewöhnlicher durch die Angabe eines gemeinverständlichen, an dem Bilde angebrachten Zeichens, wodurch es ohne Mühe aufgesucht und von andern unterschieden werden kann. Dazu dienen insbesondere Buchstaben und Ziffern, weil sie zur mündlichen Mittheilung als Laute, zur schriftlichen aber als Schriftzeichen vollkommen geeignet sind. Wenn das Bild einer Raumgröße von andern abgesondert dasteht, ist allemal ein einziges solches Zeichen zu seiner Benennung hinlänglich; wenn es aber mit andern zusammenhängt, werden oft mehrere erfordert, wie jetzt gezeigt werden wird.

*) Unter letzten Auflösungsforderungen werden solche verstanden, statt deren durch Auflösungsmittel nicht schon wieder andere gesetzt worden sind.

XXXX. Die Bezeichnung der Grundsysteme mit Ziffern oder Buchstaben kommt im Wesentlichen mit dem unmittelbaren Hinweisen auf dieselben völlig überein; so wie durch dieses, so soll auch durch jenes Mittel das Auge gezwungen werden, gerade das bestimmte System zu durchlaufen und von andern abzusondern. Zur Bezeichnung eines Punktes ist daher immer ein einziges an demselben angebrachtes Zeichen genügend, weil derselbe mit keinem andern verwechselt werden kann. Zur Bezeichnung einer geraden Linie ist in Fällen, wo sie mit andern verbunden ist, die Angabe ihrer beiden Endpunkte durch solche Zeichen hinreichend; zur deutlichen Bezeichnung einer krummen Linie wird es aber oft nothwendig, zur Bezeichnung der beiden Endpunkte noch die mehrerer andern Punkte hinzuzufügen (namentlich muß zwischen je 2 Punkte, welche anderen Linien mit jener gemein sind, noch ein Buchstabe in der Bezeichnung gesetzt werden, um dadurch das Auge zu zwingen, sich blos längs der bezeichneten Linie hin zu bewegen). Zu diesem Behufe ist es auch vortheilhaft, die zur Bezeichnung erforderlichen Buchstaben oder Ziffern in der Ordnung auf einander folgen zu lassen, in der ein Punkt die bezeichnete Linie durchlaufen würde.

XXXXI. Nunmehr ist man auch in den Stand gesetzt, jede Linienfigur, sie mag eine oder mehrere an einander hängende Linien enthalten, zu bezeichnen. Man hat zu dem Ende nur nöthig, die Bezeichnungen aller einzelnen Linien in derselben Ordnung, wie sie auf einander folgen, in der Art neben einander zu setzen, daß dasjenige Zeichen, welches einem Punkte zugehört, in dem zwei Linien zusammenhängen, nur einmal gesetzt wird. Ist die Linienfigur in sich selbst zurücklaufend, so ist man gezwungen, in der Bezeichnung mit demselben

Punkte aufzuhören, von welchem man ausgegangen ist. Da durch drei Punkte einer Ebene die Ebene selbst gegeben ist, so ist zur Bezeichnung einer begrenzten Ebene die Angabe ihres Umfanges hinreichend. — Die Bezeichnung aller andern Flächenfiguren und Körperfiguren ist ähnlichen Regeln unterworfen; da aber selbst die Bilder solcher Systeme in den meisten Fällen auf eine eigene Weise dargestellt werden, so sind dabei noch besondere Betrachtungen anzustellen, wie an seinem Orte ausführlicher gezeigt werden wird.

Niedere Geometrie.

Erster Theil.

Die Lehre von den Liniensystemen oder Longimetrie.

§. 1.

Elementarsätze.

1. Erklärung. Wenn man sich zwei gerade Linien AB, ab (Bild 1.) in einer solchen gegenseitigen Lage denkt, wobei ihre einen Endpunkte A, a in einander, und sie selbst auf einander liegen, so ist man gezwungen, sich ihre andern Endpunkte B, b entweder in einander oder außer einander liegend vorzustellen; im ersten Falle nennt man beide Linien *) einander gleich, im andern ungleich. Von zwei ungleichen Linien heißt diejenige die kleinere, deren zweiter Endpunkt unter den erwähnten Umständen diesseits; diejenige die größere, deren zweiter Endpunkt jenseits dem zweiten Endpunkte der andern Linie liegend gedacht wird.

Der Kürze halber hat man, die Gleichheit oder Ungleichheit zweier Linien auszudrücken, noch besondere Zeichen angenommeu. Das der Gleichheit ist =, das der

*) Später wird statt gerade Linie meistens nur schlechthin Linie gesetzt.

Ungleichheit > oder <, wobei die Ecke des Zeichens immer der kleinern Linie zugekehrt seyn muß. So drückt AB = ab die Gleichheit der durch AB, ab bezeichneten Linien aus. AB > ab giebt zu erkennen, daß die durch AB bezeichnete Linie grösser, als die durch ab bezeichnete ist.

Zusatz 1. Gleiche Linien, deren eine Endpunkte in einander und sie selbst auf einander liegen, liegen wechselseitig in einander.

Zusatz 2. Jede Linie ist sich selbst gleich.

Zusatz 3. Eine Linie ist einer andern gleich, sobald die Endpunkte der erstern in den Endpunkten der andern liegen.

Zusatz 4. Alle Radien einer Kreislinie sind der beschreibenden Linie gleich.

Zusatz 5. Wenn eine Linie grösser ist, als eine andere, so ist diese kleiner als jene, und umgekehrt.

Zusatz 6. Eine Linie, deren beide Endpunkte diesseits den Endpunkten einer andern liegen, ist kleiner als diese.

Zusatz 7. Der Theil einer Linie ist kleiner als die ganze Linie.

Zusatz 8. Wenn der eine Endpunkt einer Linie diesseits den Endpunkten einer andern Linie liegt, die gleich oder kleiner als die erste ist, so liegt ihr anderer Endpunkt jenseits.

Anmerk. Die genauere Entwickelung dieser Zusätze, so wie aller solchen, die in diesem Theile den Erklärungen angehängt sind, wird ihrer Abstraktion halber in den höhern Kursus verwiesen.

2. Erklärung. Wenn zwei gerade Linien AB, ab (Bild 1.) auf einander, und ihre einen Endpunkte A, a in einander liegen (Bild 2.), so wird diejenige gerade

Linie Bb, welche die beiden außer einander liegenden Endpunkte B, b verbindet, der Unterschied jener beiden genannt. Die größere der beiden Linien heißt Minuend, die kleinere Subtrahend. Statt zu sagen: der Unterschied zweier Linien wird hervorgebracht, sagt man auch: der Subtrahend wird von dem Minuenden weggenommen.

Wenn zwei gerade Linien AB, ab (Bild 1.) neben einander, und ihre einen Endpunkte A, a in einander liegen (Bild 3.), so wird diejenige gerade Linie Bb, welche die beiden außer einander liegenden Endpunkte B, b verbindet, die Summe jener beiden genannt. Jede der beiden Linien, welche die Summe bilden, heißt Summand Gerade Linien zu einander fügen, oder ihre Summe bilden, sind gleichbedeutende Ausdrücke.

Auch der Unterschied und die Summe zweier Linien, werden durch besondere Zeichen angedeutet. Jener durch das Zeichen —, wobei jedoch zu merken ist, daß der Minuend dem Zeichen immer vor, der Subtrahend nachgesetzt wird; diese durch das Zeichen +. So giebt AB — ab den Unterschied der beiden Linien AB, ab zu erkennen, und zugleich daß AB die größere von beiden sey. AB + ab drückt die Summe der beiden Linien AB, ab aus.

Zusatz 1. Bei gleichen Linien findet kein Unterschied statt.

Zusatz 2. Der Unterschied zweier Linien bleibt immer derselbe, wie auch beide Linien von einander weggenommen werden mögen.

Zusatz 3. Die Summe zweier Linien bleibt immer dieselbe, wie auch beide Linien zu einander gefügt werden mögen.

Zusatz 4. Wenn zu dem Unterschiede zweier Linien

der Subtrahend hinzugefügt wird, so gehet der Minuend hervor.

Zusatz 5. Wenn der Unterschied zweier Linien von dem Minuenden weggenommen wird, so gehet der Subtrahend hervor.

Zusatz 6. Wenn von der Summe zweier Linien der eine Summand weggenommen wird, so gehet der andere vor.

Zusatz 7. Die Ausdrücke: $(A + B) + C$ und $(A + C) + B$ und $(B + C) + A$, wobei A, B, C beliebige Linien seyn können, enthalten eine und dieselbe Linie *).

Zusatz 8. Die Ausdrücke: $(A + B) - C$, und $A + (B - C)$ wenn $B > C$, oder $A - (C - B)$ wenn $B < C$, und $B + (A - C)$ wenn $A > C$, oder $B - (C - A)$ wenn $A > C$ sind ebenfalls identisch.

Zusatz 9. Die Ausdrücke: $A - (B + C)$, und $(A - B) - C$, und $(A - C) - B$ sind gleichfalls identisch.

3. Erklärung. Der Theil AC (Bild 4.) einer Linie AB, welcher seinem ergänzenden Theile BC gleich ist, heißt die Hälfte jener ganzen Linie. Eine Linie halbiren heißt ihre Hälfte hervorbringen.

Eine Linie AB (Bild 4.), welche die Summe aus zwei andern einander gleichen Linien AC und BC ist, wird die doppelte einer jeden von diesen beiden genannt; jede von diesen heißt in Bezug auf ihre doppelte die einfache. Eine Linie wird verdoppelt, wenn ihre doppelte gebildet wird.

*) Die in Klammern eingeschlossenen Ausdrücke hat man sich immer als eine auf die bezeichnete Weise aus den angegebenen hervorgegangene Linie vorzustellen.

Daß eine Linie die Hälfte einer andern sey, wird bezeichnet, wenn man vor diese das Zeichen $\frac{1}{2}$ schreibt, und diesen Ausdruck jener gleich setzt. So drückt AC $= \frac{1}{2}$ AB aus, daß AC die Hälfte von AB sey.

Daß eine Linie die doppelte einer andern sey, wird bezeichnet, wenn man vor diese das Zeichen 2 schreibt, und diesen Ausdruck jener gleich setzt. So drückt AB $=$ 2 AC aus, daß AB die doppelte von AC sey.

Zusatz 1. Wenn AC (Bild 4.) die Hälfte von AB ist, so ist es auch ihr ergänzender Theil BC.

Zusatz 2. Wenn eine Linie die doppelte einer andern ist, so ist diese die Hälfte von jener, und umgekehrt; was daher von doppelten Linien und ihren einfachen gilt, das gilt auch von ganzen Linien und ihren Hälften.

Zusatz 3. Es ist einerlei, ob zwei ganze Linien zu einander gefügt werden, oder ob zur Summe ihrer einen Hälften die Summe ihrer andern gefügt wird.

Zusatz 4. Es ist einerlei, ob zwei ganze Linien von einander weggenommen werden, oder ob zu dem Unterschiede ihrer einen Hälften der Unterschied ihrer andern gefügt wird.

4. Als Beweismittel für solche Sätze, in denen die Gleichheit oder Ungleichheit gerader Linien betrachtet wird, bieten sich zunächst die eben aufgestellten Erklärungen jener Begriffe dar, welche aber jedesmal eine ihnen angemessene gegenseitige Lage derjenigen Linien voraussetzen, für deren Gleichheit oder Ungleichheit Beweisgründe gesucht, aus deren Gleichheit oder Ungleichheit Beweisfolgen gezogen werden sollen; es wird nämlich gefordert, daß sie selbst auf einander, und ihre einen Endpunkte in einander liegen. Dabei leuchtet von selbst ein, daß dergleichen äußere Merkmale der Systeme nur unter der Be-

dingung zu ihren innern gefügt werden dürfen, als durch sie die gegenseitige Lage aller Punkte in jedem abgeschlossenen Systeme nicht gestöret wird; weil außerdem mit der Behandlung zugleich sich auch der Gegenstand derselben änderte. Die Anordnung der gegenseitigen Lage mehrerer Liniensysteme, wodurch den Bedürfnissen der gedachten Beweismittel ein Genüge gethan wird, ohne jedoch die Beschaffenheit der Systeme, jedes für sich betrachtet, auf irgend eine Weise zu ändern, wird die Verbindung jener Liniensysteme genannt. Hieraus ergiebt sich:

a) Alles, was von der absoluten Beschaffenheit der Raumsysteme vor ihrer Verbindung ausgesagt werden kann, gilt auch, nachdem sie verbunden worden sind.

b) Alles, was von der absoluten Beschaffenheit der Raumsysteme nach ihrer Verbindung behauptet werden kann, bleibt auch wahr, nachdem die Verbindung wieder aufgehoben worden ist.

5. Wenn, wie dieß bei den zunächst folgenden Lehrsätzen geschieht, jedes Liniensystem nur aus einer einzigen geraden Linie bestehet, so hat die Verbindung derselben keine Schwierigkeit. Sind nämlich nur zwei solche Systeme vorhanden, so ist es (siehe XXI. b.) allemal gestattet, ihnen die von dem Beweismittel vorgeschriebene gegenseitige Lage beizulegen. — Sind hingegen drei solche Liniensysteme mit einander zu verbinden, so muß man sich begnügen, zuerst zwei derselben auf die angeführte Art mit einander, und hierauf noch das dritte mit einem von diesen beiden zu verbinden; weil durch die Lage zweier gegen ein drittes zugleich auch die Lage dieser beiden gegen einander bestimmt wird. Hiernach läßt sich das Verfahren bei mehr als drei solchen Systemen leicht abnehmen.

Zu Gunsten gedachter Beweismittel darf allemal eine solche Verbindung mehrerer Liniensysteme unter den erwähnten Einschränkungen bei dem Beweise eines Lehrsatzes vorausgesetzt werden, und wenn die Beweismittel mehreren gleiche Ansprüche gewähren, so kann jede für sich mit demselben Rechte gebraucht werden; aber man ist schlechterdings nicht befugt, sobald eine zu diesem Behufe angewendet worden ist, mit dieser gleichzeitig noch eine andere unter irgend einem Vorwande an dem Beweise Antheil nehmen zu lassen.

6. Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien einer dritten gleich sind, so sind sie selbst einander gleich.

Grundsysteme: Bild 5.

Gründe:	Folge:
1) $AB = ab$	$AB = \alpha\beta$.
2) $ab = \alpha\beta$	

Vorbereitung. Für die Gründe und die Folge dieses Lehrsatzes finden sich keine andern Beweismittel als die oben (in 1.) aufgezeichneten. Um mit Hülfe derselben aus den Gründen Beweisfolgen, oder für die Folge Beweisgründe zu erhalten, wird eine Verbindung der betrefflichen Linien erfordert, und zwar:

I. für die Linien AB, ab (aus Grund 1. nach 1. Erkl.) entweder die Punkte A, a oder A, b oder B, a oder B, b in einander und dabei allemal die Linien AB, ab auf einander;

II. für die Linien ab, $\alpha\beta$ (aus Grund 2. nach 1. Erkl.) entweder die Punkte a, α oder a, β, oder b, α oder b, β in einander und dabei allemal die Linien ab, $\alpha\beta$ auf einander.

III. für die Linien AB, $\alpha\beta$ (aus Folge nach 1. Erkl.) entweder die Punkte A, α oder A, β oder B, α B, β in einander und dabei allemal die Linien AB, $\alpha\beta$ auf einander.

Jede der in I. II. und III. enthaltenen Verbindungen erstreckt sich blos auf zwei Systeme; vereiniget man aber irgend zwei solche, die nicht zu denselben Systemen gehören, mit einander, so erhält man jedesmal eine Verbindung der drei Systeme, welche zu dem Beweise geschickt ist.

Wenn man den Beweis synthetisch beginnt, so ergeben sich nothwendigerweise die ersten Beweisfolgen. Sollte man von da nicht ohne Mühe die fernern erhalten, so darf man nur auf dem analytischen Wege die Beweisgründe aufsuchen.

Beweis.

Verbind. Wenn 1) die Punkte A, α in dem Punkte a und 2) die Linien AB, $\alpha\beta$ auf der Linie ab lägen,

Bew.folge 1) aus Grund 1. und Verbind.
so müßte B in b (nach 1. Erkl.)
2) aus Grund 2. und Verbind.
und b in β liegen; (nach 1. Erkl.)
3) aus Verbind. 1.
es läge demnach A in α (nach IV.)
4) aus Bew.folge 1 und 2
und B in β (nach IV.)

Schluß. aus Bew.folge 3 und 4.
Folglich muß AB $= \alpha\beta$ seyn (nach 1. Zus. 3.)

Zusatz 1. Wenn die Hälfte einer Linie einer an-

dern Linie gleich ist, so ist es auch die andere Hälfte (aus 3. Erkl.)

Zusatz 2. Wenn die einen Hälften zweier Linien einander gleich sind, so sind es auch die andern (aus vorstehendem Zusatze).

Zusatz 3. Jeder Radius einer Kreislinie ist jedem andern derselben Kreislinie gleich (aus 1. Zus. 4.); daher halbirt der Mittelpunkt jeden Durchmesser (nach 3. Erkl.)

7. Lehrsatz.

Wenn von zwei einander gleichen Linien die eine größer ist als eine dritte, so ist es auch die andere.

Grundsysteme: Bild 5.

Gründe:	Folge:
1) AB = ab	AB > $\alpha\beta$.
2) ab > $\alpha\beta$	

Vorbereitung. Auch hier liefert obige erste Erklärung sowohl Folgerungs- als Begründungsmittel, wodurch man zu Verbindungen und zu Beweisen geführt wird, die denen im vorstehenden Satze sehr ähnlich sind.

Beweis.

Verbind. Wenn 1) die Punkte A, α in dem Punkte a und 2) die Linien AB, $\alpha\beta$ auf der Linie ab lägen,

Bew.folge 1) aus Grund 1 und Verbind.

so müßte B in b (nach 1. Erkl.)

2) aus Grund 2. und Verbind.

und β diesseits b liegen; (nach 1. Erkl.)

3) aus Verbind. 1.

es läge demnach A in α, (nach IV).

4) aus Verbind. 2.
ferner AB auf $\alpha\beta$ (nach XVIII. d.)
5) aus Verbind. und Bew.folge 1 und 2.
und β diesseits B (nach X. a.)

Schluß. aus Bew.folge 3, 4 und 5.
Folglich muß AB > $\alpha\beta$ seyn. (nach 1. Erkl.)

Zusatz 1. Eine Linie ist größer als eine andere, wenn diese ein Theil von einer, der erstern gleichen Linie ist. (aus 1. Zus. 7.)

Zusatz 2. Wenn die eine Hälfte einer Linie größer ist als eine andere Linie, so ist es auch die andere Hälfte. (aus 3. Erkl.)

8. Lehrsatz.

Wenn von zwei gleichen Linien die eine kleiner ist als eine dritte, so ist es auch die andere.

Vorbereitung. Es läßt sich dieser Lehrsatz ganz wie der vorhergehende behandeln. Derselbe kann aber auch aus beiden vorhergehenden rein indirekt nachgewiesen werden.

Zusatz 1. Eine Linie ist größer als eine andere, wenn diese gleich ist einem Theile von jener. (aus 1. Zus. 7.)

Zusatz 2. Wenn die eine Hälfte einer Linie größer ist, als die eine Hälfte einer andern, so ist auch die andere Hälfte von jener Linie größer als von dieser.

9. Lehrsatz.

Wenn eine Linie größer ist als eine andere, und diese wieder größer als eine dritte, so ist jene erste größer als diese dritte.

Vorbereitung. Diese, wie überhaupt der Beweis, ist jenen (in 7. enthaltenen) ganz ähnlich.

Zusatz 1. Wenn eine Linie größer ist als eine andere, so ist sie auch größer als ein Theil dieser andern. (aus 1. Zus. 7.).

Zusatz 2. Wenn ein Theil jener Linie größer ist als eine andere, so ist jene ganze Linie auch größer als diese. (aus 1. Zus. 7.)

10. Alle nach den Beweismitteln abgeleiteten Verbindungen thaten bisher den Forderungen des Beweises Genüge, wovon der Grund darin lag, daß die betrachteten Systeme nur aus einer einzigen geraden Linie bestanden; wenn aber, wie dieß bei nachstehenden Sätzen der Fall ist, die Systeme mehrere solche Linien in sich enthalten, so muß die Verbindung der ganzen Systeme zugleich alle Verbindungen, welche die Beweismittel von den Theilen derselben fordern, in sich begreifen; dieß mag nun unmittelbar durch die Verbindung selbst, oder mittelbar durch die mit ihrer Hülfe erhaltenen Beweisfolgen oder Beweisgründe geschehen. Nennt man diejenige Verbindung, welche sich auf die ganzen Systeme bezieht, eine allgemeine, solche aber, wobei blos einzelne Theile der Systeme in Betrachtung gezogen werden, besondere, so lassen sich zur Erforschung der dem Beweise angemessenen allgemeinen Verbindungen folgende Regeln angeben:

a) Man suche zuerst für jeden Grund und für jede Folge des Lehrsatzes alle diejenigen besondern Verbindungen auf, welche den Beweismitteln, die zu gedachtem Grunde oder Folge gehören, angemessen sind.

b) Man gehe hierauf alle besondern Verbindungen eines jeden Grundes und einer jeden Folge einzeln

durch, und scheide diejenigen als unnütze aus, welche allen besondern Verbindungen irgend eines andern Grundes oder Folge widersprechen.

c) Jede von den noch übrigen besondern Verbindungen kann zur allgemeinen erhoben, und darnach der Beweis geführt werden; daher ist man auch in keinem Falle berechtiget, den Beweis, wenn er sich nach der einen nicht führen lassen sollte, eher aufzugeben, bis alle übrigen nach der Reihe in demselben eingetreten sind. Gewöhnlich führt jede solche allgemeine Verbindung zu einem besondern Beweis.

Durch die Verbindung werden mehrere Raumsysteme in ein einziges zusammengezogen, wobei bisweilen in dem verbundenen Grundsysteme eines oder mehrere der (in XXX. c.) erwähnten Merkmale unbestimmt bleibt. Um nun in einem solchen Falle der Allgemeinheit des Satzes nicht zu nahe zu treten, ist man gezwungen, den Beweis an so vielen Zusammenstellungen, als jene unbestimmten Merkmale deren verschiedene zulassen, wiederholt zu betrachten. Dieß geschieht am bequemsten, wenn für jede solche Zusammenstellung ein eigenes Grundsystem aufgestellt wird.

11. Lehrsatz.

Die Summen zweier Linien sind einander gleich, wenn die Summanden der einen denen der andern beziehlich gleich sind.

Grundsysteme: Bild 6.

Gründe:	Folge:
1) AB = ab.	AC = ac.
2) BC = bc.	
3) AB neben BC und ab neben bc.	

Vorbereit. Der dritte Grund drückt nichts anders aus, als daß AC die Summe von AB und BC, so wie ac die von ab und bc ist.

Zu den beiden ersten Gründen gehöret das obige (in 1. Erkl.) Folgerungsmittel, welches zugleich auch das hieher gehörige Begründungsmittel abgiebt. Zu dem dritten Grunde findet sich das oben (XVIII. e.) aufgestellte Folgerungsmittel. Hiernach ergeben sich nachstehende besondere Verbindungen:

I. für die Linien AB, ab (aus Grund 1. nach 1. Erkl.) entweder 1) die Punkte A, a oder 2) B, b oder 3) A, b oder 4) B, a in einander, und die Linien AB, ab allemal auf einander liegend;

II. für die Linien BC, bc (aus Grund 2. nach 1. Erkl.) entweder 1) die Punkte B, b oder 2) C, c oder 3) B, c oder 4) C, b in einander, und die Linien BC, bc allemal aufeinander liegend;

III. für die Linien AC, ac (aus der Folge nach 1. Erkl.) entweder 1) die Punkte A, a oder 2) C, c oder 3) A, c oder 4) C, a in einander, und die Linien AC, ac allemal auf einander liegend.

Da die besondern Verbindungen, welche Grund 3. fordert, sämmtlich schon in den erwähnten begriffen sind, so können sie ganz ausser Acht gelassen werden.

Bei genauerer Betrachtung aller dieser besondern Verbindungen wird sich ergeben, daß alle dritten und vierten als unnütze (nach 10. b.) zu verwerfen sind; es bleiben daher nur noch folgende übrig:

entweder die Punkte A, a in einander und dabei die Linien AB, ab oder AC, ac auf einander liegend;

oder die Punkte B, b in einander und dabei die Linien AB, ab oder Bc, bc auf einander liegend;

oder die Punkte C, c in einander und dabei die Linien AC, ac oder BC, bc auf einander liegend.

Jede dieser 6. Verbindungen, als allgemeine zu dem Beweise gezogen, führt zum Ziele.

Verbind. Wenn 1) die Punkte A, a in einander und 2) die Linien AB, ab auf einander lägen,

Bew.folge 1) aus Grund 1. und Verbind.
so müßte B in b, (nach 1. Erkl.).

Bew.folge 2. aus Grund 3. Verbind. 2. und Bew.folge 1. und BC auf bc, (nach XVIII. e.)
3) aus Grund 2. und Bew.folge 1 und 2.
demnach auch C in c liegen (nach 1. Erkl.)

Schluß aus Verbind. 1. und Bew.folge 3.
Folglich muß AC=ac seyn. (nach 1. Zus. 3.)

Zusatz 1. Linien sind gleich, wenn ihre Hälften gleich sind (aus 6. Zus. 2.); daher ist jeder Durchmesser einer Kreislinie jedem andern derselben Kreislinie gleich. (aus 6. Zus. 3.)

Zusatz 2. Von zwei Linien ist die größere doppelt genommen gleich der Summe aus dem Unterschiede und der Summe beider Linien; die kleinere doppelt genommen gleich dem Unterschiede aus der Summe und dem Unterschiede beider Linien. (aus 2. Zusatz 4 und 5.)

Zusatz 3. Wenn (Bild 7.) in einer Linie AB die Stücke AD und BE einander gleich sind, so sind es auch die Stücke AE und BD.

Zusatz 4. Wenn (Bild 7.) von einer Linie AB gleiche Stücke AD, BE abgeschnitten sind, und überdieß

die Linie DE in F halbirt ist, so ist auch die ganze Linie AB in F halbirt. (siehe 3. Erkl.)

Zusatz 5. Wenn A, B, C Linien von der Art bezeichnen, daß A—B=C, so ist auch A=B+C. (siehe 2. Zus. 4.)

Zusatz 6. Wenn A, B, C, D Linien von der Art bezeichnen, daß A—B=C—D, so ist auch A+D=B+C. (siehe Zus. 5 und 2. Zus. 8.)

Zusatz 7. Die Summe zweier ganzen Linien ist gleich der doppelten Summe ihrer Hälften. (siehe 3. Zus. 3.)

12. Man sieht leicht ein, daß in Beweisen, welche eine allgemeine Verbindung der Systeme vorausschicken, der Anfang mit der Betrachtung solcher Theile der Systeme gemacht werden müsse, deren besondere Verbindung schon vollständig in der allgemeinen enthalten ist, und daß er von da zu der Betrachtung solcher Theile übergehen müsse, deren besondere Verbindung entweder ebenfalls vollständig in der allgemeinen enthalten ist, oder die sich wenigstens theils aus der allgemeinen, theils aus den schon erhaltenen Beweisfolgen völlig ergiebt. Ueberhaupt muß sich immer eine besondere Verbindung derjenigen Theile, mit deren Betrachtung man im Beweise fortschreiten will, aus der allgemeinen und aus den Beweisfolgen vollständig erkennen lassen; weil ausserdem die bis jetzt zu Gebote stehenden Beweismittel nicht in Anwendung gebracht werden könnten.

So konnte im vorhergehenden Lehrsatze der Beweis mit dem ersten Grunde beginnen, weil eine besondere Verbindung der in diesem Grunde vorkommenden Linien AB, ab schon vollständig in der dort aufgestellten allgemeinen enthalten ist. Dagegen wäre der zweite Grund bei der bestehenden allgemeinen Verbindung keinesweges

zum Anfange des Beweises geeignet gewesen, ja sogar nachdem schon die erste Beweisfolge gefunden worden ist, kann der Beweis noch nicht zu dem zweiten Grunde übergehen, indem zur besondern Verbindung der in diesem Grunde enthaltenen Linien BC, bc noch erforderlich ist, daß sie auf einander liegen, welches sich weder aus der allgemeinen Verbindung, noch aus der ersten Beweisfolge ergiebt.

13. Da der synthetische Beweis aus den Gründen des Lehrsatzes Beweisfolgen herleitet, der analytische hingegen für die Folgen des Lehrsatzes Beweisgründe aufsucht, so geht jener von der Betrachtung solcher Theile aus, die in den Gründen enthalten sind; dieser dagegen von der Betrachtung solcher Theile, welche in den Folgen vorkommen. Will man daher den Beweis synthetisch anfangen, so müssen solche besondere Verbindungen, die aus den Gründen entsprungen sind, zu allgemeinen erhoben werden; soll er aber anfangs analytisch geführt werden, so muß die allgemeine Verbindung aus solchen besondern, zu denen die Folgen geleitet haben, hervorgegangen seyn.

So ist nur die zweite oder fünfte der in der Vorbereitung zum Beweise des vorhergehenden Lehrsatzes aufgestellten allgemeinen Verbindungen vorzugsweise zum analytischen Beweise geeignet, weil nur diese aus den daselbst in III. stehenden besondern Verbindungen der in der Folge enthaltenen Linien gebildet sind; alle übrigen sind zum synthetischen Beweise tauglich, weil in jeder eine solche besondere enthalten ist, welche zur Ableitung wenigstens aus einem Grunde geschickt ist.

14. Lehrsatz.

Die Unterschiede zweier Linien sind einander gleich, wenn Minuend und Subtrahend des einen denen des andern beziehlich gleich sind.

Grundsysteme: Bild 6.

Gründe:	Folge:
1) AB = ab.	BC = bc.
2) AC = ac.	
3) AB auf AC und ab auf ac.	

Vorbereit. Als Folgerungsmittel für den dritten Grund muß hier XVIII. d. gewählt werden; im Uebrigen ist aber der Beweis dieses Lehrsatzes ganz derselben Behandlung fähig als der des vorstehenden.

Zusatz 1. Nähme man in vorstehendem Lehrsatze noch als Grund an, daß ab = bc, so folgte auch, daß AB = BC. (nach 6. Lehrs.)

Zusatz 2. Wenn (Bild 7.) in einer Linie AB die Stücke AE und BD gleich sind, so sind es auch die Stücke AD und BE.

Zusatz 3. Wenn (Bild 7.) eine Linie AB in F halbirt ist und überdieß die Stücke AD und BE gleich sind, so ist auch DE in F halbirt. (siehe 3. Erkl.)

Zusatz 4. Wenn (Bild 7.) in einer Linie AB die Stücke AE und BD gleich sind, und überdieß DE in F halbirt ist, so ist auch AB in F halbirt. (siehe Zus. 2. und 11. Zus. 5.)

Zusatz 5. Wenn A, B, C Linien von der Beschaffenheit bezeichnen, daß A + B = C, so ist auch A = C — B und B = C — A. (siehe 2. Zus. 5.)

Zusatz 6. Wenn A, B, C, D Linien von der Beschaffenheit bezeichnen, daß $A+B=C+D$, so ist auch $A-D=C-B$ wenn $A>D$, oder $D-A=B-C$ wenn $A<D$ (siehe Zus. 5. und 2. Zus. 8.). Auch können hierbei sowohl A und B, als C und D mit einander verwechselt werden.

Zusatz 7. Der Unterschied zweier ganzen Linien ist gleich dem doppelten Unterschiede ihrer Hälften. (siehe 3. Zus. 4.)

15. Lehrsatz.

Die Summe zweier Linien ist größer als die Summe zweier andern, wenn der eine Summand in beiden gleich, der andere aber in jener größer ist als in dieser.

Grundsysteme: Bild 6.

Gründe:	Folge:
1) $AB=ab$	$AC>ac$
2) $BC>bc$.	
3) AB neben BC und ab neben bc.	

Vorbereit. Aehnliche Betrachtungen, als in beiden vorhergehenden Lehrsätzen angestellt worden sind, führen auch hier zum Beweise. Nur im Falle man eine solche allgemeine Verbindung wählt, wobei die Punkte C, c in einander liegen, stößt man auf den (10. zu Ende) erwähnten Umstand. Durch die Folgerung aus Grund 2. ergiebt sich nämlich zwar, daß B jenseits b, aber nicht, ob B diesseits a oder in a oder jenseits a liegend gedacht werden müsse; daher diese 3 verschiedenen Fälle bei jenen allgemeinen Verbindungen zur Vollständigkeit des Beweises einzeln nach einander durchgeführt werden müssen.

Zusatz 1. Wenn (Bild 7.) in einer Linie AB das Stück AD größer ist als BE, so ist auch AE größer als BD.

Zusatz 2. Wenn A, B, C Linien von der Art bezeichnen, daß entweder $A - B > C$ oder $A - B < C$, so ist im ersten Falle $A > B + C$, im andern $A < B + C$. (siehe 2. Zus. 4.)

Zusatz 3. Wenn A, B, C, D Linien von der Art bezeichnen, daß $A - B > C - D$, so ist auch $A + D > B + C$ (siehe Zus. 2. und 2. Zus. 8.)

16. Lehrsatz.

Der Unterschied zweier Linien ist größer, als der zweier andern, wenn die Subtrahenden in beiden gleich, der Minuend aber in jenem größer ist als in diesem.

Vorbereit. Der Beweis dieses Lehrsatzes läßt sich direkt ganz wie die der vorhergehenden führen; aber auch rein indirekt aus 11. Lehrs. und 15. Lehrs.

Zusatz 1. Wenn (Bild 7.) in einer Linie AB das Stück AE größer ist als BD, so ist auch AD größer als BE.

Zusatz 2. Wenn A, B, C Linien von der Beschaffenheit bezeichnen, daß $A + B < C$, so ist auch $A < C - B$ und $B < C - A$; ist aber $A + B > C$, so ist $A > C - B$ (welches voraussetzt, daß $C > B$) und $B > C - A$ (welches voraussetzt, daß $C > A$). (siehe 2. Zus. 5.)

Zusatz 3. Wenn A, B, C, D Linien von der Beschaffenheit bezeichnen, daß $A + B > C + D$, so ist auch $A - D > C - B$ wenn $C > B$, oder $D - A < B - C$ wenn $B > C$. (siehe Zus. 2. und 2. Zus. 8.). Hierbei können sowohl A und B, als C und D mit einander verwechselt werden.

17. Lehrsatz.

Der Unterschied zweier Linien ist kleiner als der zweier andern, wenn die Minuenden in beiden gleich, der Subtrahend aber in jenem größer ist als in diesem.

Vorbereit. Dieser Lehrsatz läßt sich nach Art der nächst vorhergehenden direkt erweisen.

Zusatz 1. Nähme man in vorstehendem Lehrsatze noch als Grund an, daß der kleinere Subtrahend seinem Unterschiede gleich ist, so folgte auch, daß der andere Subtrahend größer als sein Unterschied ist. (nach 9. Lehrs.)

Zusatz 2. Der größere von zwei ungleichen sich ergänzenden Theilen einer Linie ist größer als die Hälfte einer der letztern gleichen Linie; der kleinere dagegen kleiner. (rein indirekt aus Zus. 1. und 14 Zus. 1.)

18. Alle schon erwiesenen Lehrsätze können selbst wieder bei noch unerwiesenen als Beweismittel angewendet werden, weßhalb der Wege zu dem Beweise eines Lehrsatzes immer mehrere werden, je weiter dieser in der Reihe aller andern von derselben Art zurücksteht. Diese Mannigfaltigkeit wird noch größer, wenn man solche Sätze, die nicht unmittelbar als Beweismittel eintreten können, nicht sogleich verwirft, sondern erst überlegt, ob sie nicht durch irgend eine Anordnung, welche von der Geometrie, dem Wesen der Raumsysteme unbeschadet, gestattet werden darf, zu diesem Behufe brauchbar gemacht werden können. — So vergleichen in diesen Paragraphen die vier ersten Lehrsätze zwei Linien durch Vermittlung einer dritten mit einander, und es scheint daher, daß sie nur in solchen Lehrsätzen als Begründungsmittel

dienen können, wo ausdrücklich das Verhalten zweier zu einer dritten in den Systemen des Satzes befindlichen Linie angegeben werden kann; allein erwägt man, daß es immer erlaubt ist, neue Raumsysteme zu schon vorhandenen hinzuzufügen, und die Beschaffenheit jener so anzuordnen, daß sie sich innig an diese anschließen, so erhalten dadurch obige Lehrsätze als Beweismittel eine höhere Bedeutung. Ein solches Hinzufügen eines neuen Raumsystems zu schon vorhandenen, um mit dessen Hülfe diese mit einander vergleichen zu können, mag die Vermittlung des letztern heißen. Damit aber dabei der beabsichtigte Zweck erreicht werde, sind folgende Regeln zu beobachten:

a) Man füge zu den schon vorhandenen Grundsystemen noch ein neues, das mit jenen alle Merkmale gemein hat.

b) Hierauf nehme man den Satz zur Hand, welcher Linien der gegebenen Systeme mit Hülfe des vermittelnden vergleichen soll, und bemerke, welche Bestimmungen er zu diesem Ende an dem vermittelnden Systeme fordere.

c) Nunmehr suche man andere Beweismittel auf, wodurch man in den Stand gesetzt wird, die eben geforderten Bestimmungen des vermittelnden Systems aus andern Beschaffenheiten desselben herzuleiten.

d) Diese letztern Beschaffenheiten lege man dem vermittelnden Systeme bei; jedoch so, daß wenn irgend einem Theile desselben mehrere von einander verschiedene Beschaffenheiten zugeschrieben werden sollten, von allen nur die bestimmteste gewählt werde.

Durch die Vermittlung erhält demnach der Lehrsatz nicht nur ein neues Grundsystem, sondern es werden überdieß noch besondere Beschaffenheiten der Theile dieses

Grundsystems angegeben, welche während des Beweises als Gründe des Lehrsatzes zu behandeln sind. Der Beweis des so umgeformten Lehrsatzes wird übrigens ganz auf die gewöhnliche Weise geführt, nur mit dem Unterschiede, daß zu allererst aus den gewählten Beschaffenheiten des vermittelnden Systemes die noch ausserdem geforderten abzuleiten sind; weil von der Erforschung dieser die Möglichkeit des Beweises abhängt.

19. Lehrsatz.

Die Summe zweier Linien ist größer als die zweier andern, wenn jene beiden Summanden beziehlich größer sind als diese.

Grundsysteme: Bild 6.

Gründe:	Folge:
1) $AB > ab$.	$AC > ac$.
2) $BC > bc$.	
3) AB neben BC und ab neben bc.	

Vorbereit. Die bisher gebrauchten Beweismittel führen auch bei diesem Lehrsatze zum Ziele; da aber ihre Behandlungsweise schon zur Genüge erläutert worden ist, so wenden wir uns sogleich zu einer andern Beweisart.

Der in 9. aufgestellte Lehrsatz giebt ein Begründungsmittel dieses ab, wenn wir die oben erwähnte Vermittlung zu Rathe ziehen *). Stellen wir dieser gemäß (Bild 8.) ein Grundsystem $\alpha\beta\gamma$ auf, so fordert das angeführte Begründungsmittel zu seiner Anwendbarkeit folgende Be-

*) Wäre dabei statt des in 9. aufgestellten der in 7. oder 8. enthaltene Lehrsatz gewählt worden, so wird man immer auf denselben Satz wieder zurückgeführt, von dem man ausgegangen ist.

stimmungen an dem vermittelnden Systeme: nämlich daß AC > $\alpha\gamma$ und $\alpha\gamma$ > ac sey. Suchen wir nun solche Beweismittel auf, welche im Stande sind, diese Bestimmungen aus andern Beschaffenheiten jenes Systems nachzuweisen, so stoßen wir auf den in 15. stehenden Lehrsatz, welcher fordert:

I. für die Bestimmung AC > $\alpha\gamma$:
daß die Linien $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ neben einander liegen, und der eine Theil der Linie $\alpha\gamma$, einem Theile der Linie AC gleich, der andere in jener aber kleiner sey, als in dieser;

II. für die Bestimmung $\alpha\gamma$ > ac:
daß die Linien $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ neben einander liegen, und der eine Theil von $\alpha\gamma$ einem Theile von ac gleich, der andere hingegen in jener größer sey, als in dieser.

Läßt man nun, den in I. enthaltenen Forderungen gemäß, einen Theil der Linie $\alpha\gamma$ einem Theile der AC gleich werden, z. B. $\alpha\beta$ = AB, so ergiebt sich sogleich aus den in II. enthaltenen Forderungen, daß der andere Theil $\beta\gamma$ einem Theile der Linie ac gleich werden müsse; denn diese Forderung, welche die bestimmteste ist, darf nicht mehr an dem Theile $\alpha\beta$ in Vollzug gebracht werden, weil dessen Beschaffenheit schon durch die Bestimmung AB = $\alpha\beta$ gänzlich bedingt ist. Es kann demnach entweder $\beta\gamma$ = bc oder $\beta\gamma$ = ab werden; letztere Annahme ist aber unbrauchbar, weil sich aus ihr nicht die übrigen in I. und II. enthaltenen Forderungen ableiten lassen.

Auf solche Art läßt sich die Beschaffenheit der Theile $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, wie sie die Vermittlung fordert, auf viererlei Weise bestimmen, wovon jede zum Beweise geschickt ist; nämlich:

Die Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ neben einander liegend und dabei entweder

1) $\alpha\beta = AB$ und $\beta\gamma = bc$, oder 2) $\alpha\beta = BC$ und $\beta\gamma = ab$, oder 3) $\beta\gamma = AB$ und $\alpha\beta = bc$, oder 4) $\beta\gamma = BC$ und $\alpha\beta = ab$.

Beweis.

Vermittl. Man füge zu den schon vorhandenen Systemen ein neues $\alpha\beta\gamma$ (Bild 8.) von der Beschaffenheit hinzu, daß 1) die Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ neben einander liegen, und sowohl 2) $\alpha\beta = AB$ als 3) $\beta\gamma = bc$ sey,

Bew.folge 1) aus Grund 1. und Vermittl. 2.
so ist $\alpha\beta > ab$ (nach 7. Lehrs.)

Bew.folge 2) aus Grund 2. und Vermittl. 3.
und $BC > \beta\gamma$; (nach 8. Lehrs.)

3) aus Grund 3. Vermittl. 1 und 2. und Bew.folge 2.
daher ist auch $AC > \alpha\gamma$ (nach 15. Lehrs.)

4) aus Grund 3. Vermittl. 1 und 3. und Bew.folge 1.
und $\alpha\gamma > ac$. (nach 15. Lehrs.)

Schluß. aus Bew.folge 3 und 4.
Folglich muß $AC > ac$ seyn. (nach 9. Lehrs.)

Anmerk. Das vermittelnde System kann man sich auch mit einem der beiden gegebenen in einer bestimmten Verbindung vorstellen, wodurch die Form dieses Beweises mehrere Abwechselungen erhalten kann.

Zusatz 1. Wenn die Hälfte einer Linie grösser ist als die Hälfte einer andern, so ist auch jene ganze grösser als diese. (siehe 7. Zus. 2.)

Zusatz 2. Die Hälften gleicher Linien sind gleich; und die Hälfte einer größern Linie ist größer als die einer kleinern. (rein indirekt aus Zus. 1. und 11. Zus. 1.)

20. Lehrsatz.

Der Unterschied zweier Linien ist größer als der zweier andern, wenn jener Minuend größer als dieser, jener Subtrahend dagegen kleiner als dieser ist.

Vorbereit. Dieser Lehrsatz läßt sich nicht nur nach Art des vorhergehenden direkt, sondern auch überdieß aus vorstehendem und dem in 15. enthaltenen rein indirekt erweisen.

---

§. 2.

Elementaraufgaben.

21. Dem Auflösen der Aufgaben schicken wir einige dahin gehörige Betrachtungen voraus.

Es ist nicht genug, die Theile eines zu erzeugenden Systems, von einander abgesondert, den Forderungen gemäß hervorzubringen, sondern sie müssen noch überdieß diejenige äußere Beziehung zu einander erhalten, welche das Grundsystem von ihnen fordert; deßwegen sind bei diesem Geschäfte folgende Regeln zu beobachten:

1) Die Auflösung muß mit einem solchen gesuchten Theile des zu bildenden Systems den Anfang machen, welcher sich unmittelbar an bekannte Theile des-

selben Systems anschließt, und während seiner Konstruktion sind solche Merkmale, die er mit schon bekannten gemein hat, als gegebene zu betrachten.

2) Jeder gesuchte Theil, dessen Konstruktion schon geschehen ist, ist von nun an als ein bekannter zu behandeln; daher kann die Auflösung von da zu solchen Theilen übergehen, die mit dem eben erzeugten in unmittelbarem Zusammenhange stehen.

Es geschieht aber zuweilen, daß kein einziger Theil eines zu erzeugenden Systems in der Aufgabe als bekannt vorausgesetzt wird. In einem solchen Falle ist es immer erlaubt, solche uud so viele Elemente desselben willkührlich anzunehmen und bekannten gleich zu behandeln, als bei der Verbindung eines Systems mit einem andern zu berücksichtigen sind. Wir wollen diese Vorkehrung die Stellung des zu erzeugenden Systems nennen. So wie durch die Verbindung die gegenseitige Lage zweier Raumsysteme zu einander bestimmt wird, so wird durch die Stellung das Verhalten des erzeugten Systems zu einem unbestimmten Raume festgesetzt. Hieraus folgt, daß jede Aufgabe, bei deren Auflösung eine Stellung vorausgeschickt wird, in eine andere verwandelt werden könne, worin, mit Weglassung der Stellung, die darin enthaltenen Elemente als gegebene Theile erscheinen. Uebrigens erhellet aus Vorstehendem, daß von der Wahl der Stellung die Möglichkeit und der Gang der Auflösung größtentheils abhänge; daher muß auch die Stellung hier auf ähnliche Weise den Forderungen gemäß angeordnet werden, wie oben die Verbindung von den Gründen und Folgen eines Lehrsatzes abhängig gemacht wurde.

22. Damit die logische Einheit eines Raumsystems nicht zerstört werde, ist erforderlich, nicht nur daß wäh-

rend der Auflösung kein bekannter Theil des zu erzeugenden Raumsystems irgend eine innere Veränderung erleide, sondern auch daß dasselbe Gesetz bei jedem durch die Auflösung zu demselben neu hinzugekommenen Theile genau befolgt werde. Ausserdem ist es aber der geometrischen Kunst verstattet, die gegenseitige Lage verschiedener Systeme zu einander nach Umständen durch eine Verbindung anzuordnen, oder auch ganz neue Systeme von beliebiger Beschaffenheit, deren Konstruktion jedoch zuvor gelehret worden seyn muß, durch eine Vermittlung zu den übrigen noch hinzu zu fügen; weil solche Vorkehrungen auf die innere Beschaffenheit der Raumsysteme keinen Einfluß haben. Sogar an ein einzelnes System darf sie, wo es nothwendig wird, noch neue Theile hängen, wenn dadurch kein bekannter Theil irgend einer auf sein Verhalten zu dem ursprünglichen Systeme sich beziehenden Veränderung unterworfen wird, weil dann die absolute Beschaffenheit des fraglichen Systems durch dieses Hinzufügen auf keine Weise bedingt wird. Ein solches Hinzufügen neuer Theile mag die Vermehrung des Systems heißen. Weiter unten wird die Vermehrung auch in der geometrischen Wissenschaft erscheinen und dort umständlicher auseinandergesetzt werden.

23. Aufgabe.

Eine gerade Linie zu beschreiben, die einer andern gegebenen gleich ist.

Grundsysteme: Bild 9.

Angabe:	Forderung:
die Lage von A zu B.	die Lage von a zu b, so daß $ab = AB$.

Vorbereit. Da die Linie ab gänzlich unbekannt ist, so kann in der Stellung ihr einer Endpunkt, z. B.

a, und ihre Richtung willkührlich angenommen werden, so daß alles darauf ankommt, den Punkt b so zu bestimmen, daß ab = AB.

Da keine Aufgabe vorhanden ist, die diese Bestimmung lehrte, so müssen Sätze, in welchen jene Forderung als Folge vorkommt, zu Auflösungsmitteln dienen. Dergleichen sind: 1. Erkl., 6. Lehrs., 11. Lehrs. und 14. Lehrs.

Nach 1. Erkl. müssen die einen Endpunkte der Linien AB und ab (also A und a, oder B und a, weil b noch unbekannt ist) in einander und sie selbst auf einander liegen, worauf b in dem andern Endpunkt liegt, welches die erste Auflösung giebt.

Nach 6. Lehrs. fordern die Gründe, daß zuerst eine dritte von denen AB und ab verschiedene Linie einer der letztern (dieß kann nur AB seyn, weil ab noch unbekannt ist) gleich, und hierauf die andern von diesen beiden (also ab) jener dritten wieder gleich werde. So entsteht die zweite Auflösung, welche die erste voraussetzt und überdieß ein vermittelndes System zu Hülfe nimmt.

Nach 11. Lehrs. und 14. Lehrs. wird vorausgesetzt, daß AB entweder die Summe oder die Differenz zweier andern Linien sey (welches zu bewerkstelligen, eine Vermehrung des Systems eintreten muß); hierauf fordern die Gründe, daß ab die Summe oder Differenz gleicher Linien werde. So entsteht die dritte und vierte Auflösung, welche sich auf eine der beiden vorhergehenden stützen.

Auflösung 1.

Stellung. Man ziehe beliebig eine gerade Linie mn (nach XXI. a.), und wähle in der-

selben nach Gefallen einen Punkt a; (nach XIII. c.)

Verbind. aus Angabe und Stellung.

Hierauf bringe man die Punkte A, a in einander und die Linien AB, am auf einander; (nach XXI. b.)

Aufl. ford. aus Angabe und Verbind.

endlich bemerke man in der Linie am den Punkt b, in welchem B liegt: (nach XIII. c.)

Schluß. aus Verbind. und Aufl. ford.

so ist ab = AB. (nach 1. Erkl.)

Anmerk. Dieses Verfahren ist nur dann anwendbar, wenn beide Linien auf die beschriebene Weise sich mit einander verbinden lassen, welches in der Ausübung oft nicht geschehen kann. In einem solchen Falle muß man zur folgenden Auflösung seine Zuflucht nehmen.

Auflösung 2.

Vermittl. aus Angabe.

Man mache irgend eine Linie $\alpha\beta$ = AB; (nach Aufl. 1.)

Aufl. ford. aus Vermittl.

hierauf ab = $\alpha\beta$: (nach Aufl. 1.)

Schluß. aus Vermittl. und Aufl. ford.

so ist ab = AB. (nach 6. Lehrs.)

Anmerk. Erwägt man hierbei, daß zur Auflösung blos die gegenseitige Lage der beiden Endpunkte α und β erforderlich ist, so hat man das allgemeinste Erforderniß aller Zirkel; nämlich 2 Punkte, die sich in jede Lage bringen und darin feststellen lassen.

Auflösung 3.

Vermehr. aus Angabe.

Man wähle in der Linie AB irgend einen Punkt C, (nach XIII. c.)

Aufl.ford. 1) aus Angabe, und Vermehr.

mache zuerst ac=AC, (nach Aufl. 1 oder 2.)

2) aus Angabe, Vermehr. und Aufl.ford. 1.

hierauf cb=CB: (nach Aufl. 1 oder 2.)

Schluß. aus Aufl.ford. 1 und 2.

so ist ab=AB. (nach 11. Lehrs.)

Anmerk. Diese Auflösung ist von Nutzen, wenn die Punkte A und B so weit von einander entfernt sind, daß sie nicht bequem mit einem Male aufgefaßt werden können.

Auflösung 4.

Vermehr. aus Angabe.

Man wähle in der Verlängerung von AB noch irgend einen Punkt D, nach XXI. e. und XIII. c.)

Aufl.ford. 1) aus Angabe und Vermehr.

mache zuerst ad=AD, (nach Aufl. 1 oder 2.)

2) aus Angabe, Vermehr. und Aufl.ford. 1.

hierauf db=DB: nach Aufl. 1 oder 2.)

Schluß. aus Aufl.ford. 1 und 2.

so ist ab=AB. (nach 14. Lehrs.)

Anmerk. Diese Auflösung ist vortheilhaft, wenn mehrere an einander hängende und neben einander liegende Linien in derselben Lage gleich gemacht werden sollen, weil so die durch den Gebrauch der Werkzeuge verursachten unvermeidlichen Fehler auf alle Linien gleichmäßig vertheilt werden.

Zugabe 1. Eine Linie zu finden, die dem Unterschiede zweier gegebenen gleich ist. (aus 14. Lehrs.)

Zugabe 2. Eine Linie zu beschreiben, die der Summe zweier gegebenen gleich ist. (aus 11. Lehrs.)

Zugabe 3. Eine Linie zu verdoppeln. (aus 3. Erkl.)

24. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie zu halbiren.

Grundsystem: Bild 7.

Angabe:	Forderung:
die Lage von A zu B.	die Lage von F zu A und B, so daß AF = BF

Vorbereit. Als Auflösung bieten sich vorzugsweise 11. Zus. 4. und 14. Zus. 4. an.

Zwar giebt auch 1. Erkl. eine Auflösung an die Hand; hiernach müßten nämlich die einen Endpunkte der Linien AF und BF (also A und B, weil F noch unbekannt ist) in einander und sie selbst auf einander gebracht werden. Ein solches Zusammenlegen der Linie AB setzt aber Bewegsamkeit an derselben voraus, welche nur in besondern Fällen anzutreffen ist.

Die hier besonders aufgestellten Auflösungsmittel fordern, daß zuerst auf beiden Seiten der Linie AB durch eine Vermehrung gleiche Stücke abgeschnitten und hierauf der mittlere Theil von neuem halbirt werde. Auf diese Weise kehret zwar immer dieselbe Aufgabe wieder zurück; die gesuchte Mitte aber wird in immer engere Grenzen eingeschlossen, so daß in der Ausübung diese Grenzen bald mit dem Bilde der Mitte zusammenfallen.

Auflösung.

Vermehr. aus Angabe.

Man wähle in der Linie AB irgend einen Punkt C (nach XIII. c.) und mache BD = AC, (nach 23. Aufg.)

Aufl. ford. aus Vermehr.

hierauf halbire man CD in F: (wobei immer dasselbe Verfahren wiederkehrt)

Schluß. aus Vermehr. Aufl. ford.

so ist AF = BF (nach 11. Zus. 4. oder 14. Zus. 4.)

Anmerk. Es ist nach 14. Lehrs. einerlei, ob bei Halbirung des mittlern Theils CD die gleichen Stücke von den Punkten C und D oder A und B abgeschnitten werden. Letztere Art ist in der Ausübung der erstern vorzuziehen.

Zugabe. Zwei Linien zu finden, deren Summe und deren Unterschied gegeben ist. (aus 11. Zus. 2)

---

§. 3.

Erweiterungen obiger Sätze.

25. Alle bis jetzt vorgetragenen Sätze können in einer viel größern Allgemeinheit dargestellt werden. So wie aber der allgemeinere Satz nichts anders als ein wiederholtes Setzen der einfachern ist, so sind auch die Beweise und Auflösungen der erstern nichts anders als eine wiederholte Darstellung der zu letztern gehörigen. Aus diesem Grunde lassen sich solche erweiterte Sätze nicht nur auf eine ähnliche Art beweisen wie die übrigen, sondern sie sind ausserdem noch einer abgekürzten Beweisart fähig. Die einfachen Sätze selbst geben nämlich sowohl

Folgerungs- als Begründungsmittel für ihre nächsten Erweiterungen ab, und diese wieder für noch allgemeinere Sätze, wodurch die Umschweife, welche die Zusammenstellung aller einzelnen Beweise verursachen müßte, vermieden werden. Da übrigens die Bildung sowohl als der Beweis der erweiterten Sätze keine besondern Schwierigkeiten veranlassen, so mögen einige Beispiele davon zur Einsicht in die Behandlung aller übrigen dienen. Dabei ist noch zu bemerken, daß man durch die Verknüpfung der erweiterten Lehrsätze unter einander immer wieder zu allgemeinern und zuletzt zu einigen wenigen gelangen kann, die alle übrigen als besondere Fälle in sich schließen.

26. Erklärung.

Die Summe von drei Linien entstehet, wenn zur Summe zweier noch die dritte gefügt wird; die Summe von vier Linien wird hervorgebracht, wenn zur Summe dreier noch die vierte hinzukommt, u. s. w. Auf diese Weise wird klar, was unter der Summe mehrerer Linien zu verstehen sey. Jede solche einzelne Linie heißt Summand.

Die Summe mehrerer Linien wird bezeichnet, indem zwischen dieselben das Zeichen + gesetzt wird. AB + CD + EF + GH z. B. stellt die Summe der durch AB, CD, EF, GH ausgedrückten Linien vor.

Zusatz. Die Summe mehrerer Linien bleibt immer dieselbe, wie und in welcher Ordnung auch die einzelnen Summanden zu einander gefügt werden mögen.

27. Erklärung.

Wenn eine Linie in mehrere sich ergänzende Theile getheilt ist, wovon jeder vorhergehende seinem nachfolgenden gleich ist, so heißt jeder der vielte Theil der

ganzen Linie. Insbesondere heißt er der dritte, wenn drei solche Theile vorhanden sind; bei vieren der vierte, u. s. f.

Die Summe mehrerer Linien, wovon jede vorhergehende ihrer nachfolgenden gleich ist, heißt die vielfache einer jeden dieser Linien, welche im Gegensatze einfache genannt werden. Insbesondere heißt sie die dreifache, wenn drei solche einfache zu einander gefügt sind; bei vieren die vierfache, u. s. f.

Die Bezeichnungen der Vielfachen und vielten Theile sind denen (in 3.) für Doppelte und Hälften gegebenen ähnlich. So drückt $AB = 3\,CD$ aus, daß AB die dreifache von CD ist; $AB = \frac{1}{3}CD$, daß AB der dritte Theil von CD ist. $AB = 4\,CD$ zeigt an, daß AB die vierfache; $AB = \frac{1}{4}CD$, daß AB der vierte Theil von CD ist. $AB = n.CD$ giebt zu erkennen, daß AB ein unbestimmtes Vielfaches von CD ist; $AB = \frac{1}{n}CD$, daß AB irgend ein vielter Theil von CD ist.

Zusatz. Wenn eine Linie die vielfache einer andern ist, so ist diese ein vielter Theil von jener, und umgekehrt; was daher von ganzen Linien und ihren vielten Theilen gilt, das gilt auch von vielfachen Linien und ihren einfachen, und umgekehrt.

28. Lehrsatz.

Wenn in einer Reihe gerader Linien jede ihrer nächstfolgenden gleich ist, so ist auch die erste der letzten, und überhaupt jede jeder gleich.

Beweis.

1) für 4 Linien A, B, C, D.

Gründe:	Folge:
1) A = B	A = D.
2) B = C	
3) C = D	

Bew.folge aus Grund 1 und 2.

Es ist A = C; (nach 6. Lehrs.)

Schluß aus Grund 3. und Bew.folge.

also auch A = D. (nach 6. Lehrs.)

2) für 5. Linien: A, B, C, D, E.

Gründe:	Folge:
1) A = B	A = E.
2) B = C	
3) C = D	
4) D = E	

Bew.folge. aus Grund 1. 2. und 3.

Es ist A = D; (nach Beweis 1.)

Schluß. aus Grund 4. und Bew.folge.

also auch A = E. (nach 6. Lehrs.)

3) für unbestimmt viele Linien.

Da die vorletzte Linie immer der letzten gleich ist, so hat man (nach 6. Lehrs.) nur zu zeigen, daß die erste der vorletzten gleich sey, um bewiesen zu haben, daß auch die erste der letzten gleich ist. Es wird demnach zu dem Beweise für irgend eine Anzahl von Linien immer nur der Beweis für die um eins geringere Anzahl von Linien vorausgesetzt; weßwegen sich der hier in 1. und 2. bis auf 5 Linien fortgeführte Beweis auf so viele Linien ausdehnen läßt, als man nur will. Daher ist der

erweiterte Lehrsatz für jede Anzahl von Linien wahr.

Anmerk. Mehrere Linien A, B, C, D, E ꝛc. ꝛc., wovon jede jeder gleich ist, pflegt man kurz so zu bezeichnen: A = B = C = D = E ꝛc. ꝛc.

Zusatz 1. Wenn ein vielter Theil einer Linie einem vielten Theile einer andern Linie gleich ist, so ist jeder von jenen vielten Theilen jedem von diesen gleich.

Zusatz 2. Wenn ein vielter Theil einer Linie größer ist als ein vielter Theil einer andern Linie, so ist jeder von jenen vielten Theilen größer als jeder von diesen.

29. Lehrsatz.

Wenn in einer Reihe gerader Linien jede vorhergehende größer ist als ihre nächst folgende, so ist auch die erste Linie größer als die letzte, und überhaupt jede vorhergehende größer als jede folgende.

Vorbereit. Dieser erweiterte Satz läßt sich ganz so wie der vorhergehende erweisen.

30. Lehrsatz.

Wenn in zwei aus gleichviel geraden Linien bestehenden Reihen jede Linie der einen Reihe der eben so vielten in der andern Reihe gleich ist, so ist auch die Summe aller Linien der ersten Reihe gleich der Summe aller Linien der andern Reihe.

Beweis.

1) für 3 Linien in jeder Reihe: A, B, C und a, b, c.

Gründe:	Folge:
1) $A = a$.	$A + B + C = a + b + c$.
2) $B = b$.	
3) $C = c$.	

Bew.folge. aus Grund 1 und 2.

Es ist $A + B = a + b$; (nach 11. Lehrs.)

Schluß. aus Grund 3. und Bew.folge.

also auch $A + B + C = a + b + c$. (nach 11. Lehrs.)

2) für 4 Linien in jeder Reihe: A, B, C, D und a, b, c, d.

Gründe:	Folge:
1) $A = a$.	$A + B + C + D = a + b + c + d$.
2) $B = b$.	
3) $C = c$.	
4) $D = d$.	

Bew.folge aus Grund 1. 2. und 3.

Es ist $A + B + C = a + b + c$; (nach Beweis 1.)

Schluß. aus Grund 4. und Bew.folge.

also auch $A + B + C + D = a + b + c + d$. (nach 11. Lehrs.)

3) für unbestimmt viele Linien in jeder Reihe.

Da die letzten Linien in beiden Reihen immer einander gleich sind, so hat man (nach 11. Lehrs.) nur zu zeigen, daß die Summen aller Linien, die letzte ausgenommen, in beiden Reihen einander gleich seyen, um bewiesen

zu haben, daß auch die Summen aller Linien, sammt der letzten, einander gleich sind. Es wird demnach zu dem Beweise für irgend eine Anzahl Linien in jeder Reihe immer nur der Beweis für die um eins geringere Anzahl vorausgesetzt; weßwegen sich der hier in 1. und 2. bis auf vier Linien fortgeführte Beweis auf so viele Linien ausdehnen läßt, als man nur will. Daher ist der erweiterte Satz für jede Anzahl von Linien wahr.

Anmerk. Dieser und der folgende Lehrsatz erhalten mit Zuziehung des in 26. ausgesprochenen Zusatzes noch eine allgemeinere Bedeutung.

Zusatz. Wenn zwei Linien einander gleich sind, so sind auch ihre gleichvielfachen einander gleich.

31. Lehrsatz.

Wenn in zwei aus gleichviel geraden Linien bestehenden Reihen jede Linie der einen Reihe größer ist als die eben so vielte in der andern Reihe, so ist auch die Summe aller Linien der erstern Reihe größer als die Summe aller Linien der andern Reihe.

Vorbereit. Dieser erweiterte Satz läßt sich ganz so wie der vorhergehende erweisen.

Zusatz 1. Wenn eine Linie größer ist als eine andere, so ist auch die vielfache der erstern größer als die gleichvielfache der andern.

Zusatz 2. Gleichvielte Theile gleicher Linien sind einander gleich; und jeder vielte Theil einer Linie ist größer als der gleichvielte Theil einer kleinern Linie. (rein indirekt aus 30. Zus. und vorigem Zusatze).

32. Erklärung.

Eine Linie A enthält eine andere a so oft in sich, so vielfach diese genommen werden muß, bis sie entweder jener gleich wird, oder doch ihr so nahe kommt, daß jede mehrfache von a größer als A würde. Man nennt dieß: A durch a theilen, und sagt im ersten Falle, A sey durch a theilbar; im andern, A sey durch a untheilbar, wobei der zwischen A und dem erwähnten Vielfachen von a Statt findende Unterschied der durch die Theilung entstandene Rest von A genannt wird. Auch pflegt man a den Theiler zu nennen.

Zusatz 1. Eine größere Linie ist in einer kleinern keinmal enthalten, und dabei bleibt die kleinere selbst als Rest.

Zusatz 2. Jede Linie ist durch eine ihr gleiche theilbar, und in ihr einmal enthalten.

Zusatz 3. Jede Linie ist durch ihren vielten Theil theilbar, und enthält ihn so oft in sich, als der wievielte er ist.

33. Erklärung.

Das Verhältniß einer Linie A zu einer andern a wird bestimmt, wenn angegeben wird:

1) wie oft a in A enthalten ist, und
2) wenn bei dieser Theilung ein Rest bleibt, wie oft dieser erste Rest in a enthalten ist, und,
3) wenn auch hier wieder ein Rest bleibt, wie oft dieser zweite Rest in dem ersten enthalten ist, und,
4) wenn auch da noch ein Rest bleibt, wie oft dieser dritte Rest in dem zweiten enthalten ist, u. s. f. ins unbestimmte; es sey denn, daß irgend wo die Thei-

lung ohne Rest aufgeht, in welchem Falle das Verhältniß beider Linien an jenem Orte gänzlich bestimmt wird.

Dabei wird die Linie a, welche gleich anfangs als Theiler angenommen wird, das Hinterglied, die andere A hingegen das Vorderglied des Verhältnisses genannt. Es ist aber nicht nothwendig, daß das Hinterglied kleiner als das Vorderglied sey, dasselbe kann auch gleich oder gar größer seyn.

Das Verhältniß zweier Linien zu einander wird bezeichnet, wenn man das Vorderglied vor, das Hinterglied hinter das Zeichen : setzt. So drückt A:a das Verhältniß von A zu a aus.

34. Erklärung.

Zwei Verhältnisse heißen einander gleich, wenn in beiden alle auf gleichnamige Theiler sich beziehende Angaben völlig dieselben sind; im Gegentheile ungleich. Die Zusammenstellung zweier gleicher Verhältnisse wird Proportion genannt. Eine Proportion heißt stetig, wenn das Hinterglied des einen Verhältnisses dem Vorderglied des andern gleich ist.

Die Gleichheit zweier Verhältnisse wird eben so bezeichnet, wie die zweier Linien. So drückt A:a = B:b aus, daß die beiden Verhältnisse A:a und B:b einander gleich sind, oder daß sie eine Proportion ausmachen.

Zusatz 1. Gleiche Linien haben zu gleichen gleiches Verhältniß; ungleiche zu gleichen, oder gleiche zu ungleichen Linien haben ungleiches Verhältniß.

Zusatz 2. Wenn A:a = B:b, so ist auch a:A = b:B.

Zusatz 3. Wenn $A:a=B:b$ und $B:b=C:c$, so ist auch $A:a=C:c$.

Zusatz 4. Wenn $A:a=B:b$, so ist auch $A+a:a=B+b:b$ und $A+a:A=B+b:B$.

Zusatz 5. Wenn $A:a=B:b$, so ist auch entweder $A-a:a=B-b:b$ und $A-a:A=B-b:B$, oder $a-A:a=b-B:b$ und $a-A:A=b-B:B$, je nachdem $A>a$ und $B>b$, oder $A<a$ und $B<b$ ist.

35. Erklärung.

Liniengemäß wird eine Zusammenstellung gerader Linien genannt, von denen immer die folgende ein vielter Theil der vorhergehenden ist. Die erste und größte von diesen Linien mag der Grundtheil des Gemäßes heißen; die nächst kleinere der erste abgeleitete Theil; die hierauf folgende der zweite abgeleitete Theil, u. s. f. — Zwei Liniengemäße sind gleichartig (der Grundtheil des einen mag dem des andern gleich seyn oder nicht), wenn in beiden die Grundtheile Gleichvielfache der ersten abgeleiteten, diese wieder Gleichvielfache der zweiten abgeleiteten Theile sind, u. s. w. — Gleichartige Gemäße heißen gleich, wenn ihre Grundtheile einander gleich sind, im Gegentheile ungleich. Von zwei ungleichen Gemäßen wird dasjenige das größere genannt, dessen Grundtheil der größere ist; dasjenige das kleinere, dessen Grundtheil der kleinere ist.

Anmerk. Die große Verschiedenheit der Liniengemäße hat theils in der willkührlichen Annahme des Grundtheils, theils in der mannigfaltigen Abtheilung desselben in die abgeleiteten Theile ihren Grund.

36. Erklärung.

Das Maß einer Linie nach einem Gemäße bestimmen, heißt angeben:

1) wie oft der Grundtheil des Gemäßes in der Linie enthalten ist, und,

2) wenn ein Rest bleibt, wie oft der erste abgeleitete Theil in dem ersten Reste enthalten ist, und,

3) wenn hier wieder ein Rest bleibt, wie oft der zweite abgeleitete Theil in dem zweiten Reste enthalten ist, u. s. f. ins unbestimmte; es sey denn, daß irgendwo die Theilung ohne Rest aufgeht, in welchem Falle die Messung an jenem Orte aufhört.

Bezeichnet man die gemessene Linie durch A, das Liniengemäß durch M, so wird das Maß der Linie durch A :: M ausgedrückt.

37. Erklärung.

Gerade Linien, welche nach gleichartigen Gemäßen gemessen werden, haben gleiches Maß, wenn alle auf gleichnamige Theile der Gemäße sich beziehende Angaben der Maße völlig dieselben sind; im Gegentheile haben die Linien ungleiches Maß. Von zwei Linien, welche ungleiches Maß haben, hat diejenige das größere, bei welcher (vom Grundtheile des Gemäßes ausgegangen) die erste verschiedene Angabe des Maßes mehr gleichnamige Theile vom Gemäße angiebt als bei der andern, die dann das kleinere Maß hat.

Bezeichnen M, m gleichartige Gemäße, womit beziehlich die Linien A, a gemessen worden sind, so daß also A :: M und a :: m die zugehörigen Maße vorstellen,

so wird durch A :: M = a :: m angezeigt, daß beider Maße gleich sind, so wie durch A :: M > a :: m, daß das Maß der Linie A größer, und durch A :: M < a :: m, daß es kleiner als das Maß der Linie a ist.

Zusatz 1. Wenn A, a, α drei gerade Linien und M, m, μ drei gleichartige Gemäße vorstellen, und es ist sowohl A :: M = a :: m als a :: m = α :: μ, so ist auch A :: M = α :: μ.

Zusatz 2. Gleiche Linien nach gleichen Gemäßen gemessen, geben gleiches Maß.

Zusatz 3. Die größere von zwei nach gleichen Gemäßen gemessenen Linien giebt das größere Maß.

Zusatz 4. Von zwei gleichen Linien giebt die nach dem kleinern Gemäße gemessene das größere Maß.

Zusatz 5. Gleiche Linien, welche gleiches Maß geben, sind nach gleichen Gemäßen gemessen worden.

Zusatz 6. Die größere von zwei Linien, welche gleiches Maß geben, ist nach einem größern Gemäße gemessen worden.

Zusatz 7. Von zwei gleichen Linien ist diejenige nach einem kleinern Gemäße gemessen worden, welche das größere Maß giebt.

Zusatz 8. Linien sind gleich, wenn sie nach gleichen Gemäßen gemessen gleiches Maß geben.

Zusatz 9. Diejenige Linie ist die größere, welche nach gleichem Gemäße gemessen das größere Maß giebt.

Zusatz 10. Diejenige Linie ist die größere, welche nach einem größern Gemäße gemessen gleiches Maß giebt.

Anmerk. Die in diesem Paragraphen aufgestellten Erklärungen öffnen der Untersuchung ein weites Feld, das aber jenseits der Grenzen dieser Schrift liegt. Mehrere hieher gehörige Lehrsätze und Aufgaben erfordern nur eine leichte Anwendung der oben auseinandergesetzten einfachern, diese übergehen wir mit Stillschweigen; andere erscheinen später unten in einem gefälligern Gewande, wo ihrer in kurzem Erwähnung gethan werden wird.

Zweiter Theil.

Die Lehre von den Flächensystemen
oder
Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Von noch nicht völlig begrenzten Ebenen.

§. 4.

Erklärung und allgemeinste Eigenschaften der Winkel.

38. Erklärung.

Wenn sich in einer Ebene eine gerade Linie AS (Bild 10.) um den einen ihrer Endpunkte S bewegt, so kommt sie in Lagen, wie BS, CS, die sich immer mehr von ihrer ersten entfernen. Bewegt sie sich noch weiter, so kommt sie endlich in eine Lage DS, die so beschaffen ist, daß sie mit ihrer anfänglichen AS eine gerade Linie bildet; diese Lage nennen wir die entgegengesetzte der ursprünglichen. Fährt sie auch hier noch fort, sich zu bewegen, so kommt sie in Lagen, wie ES, FS, die sich ihrer ursprünglichen immer mehr nähern, bis sie zuletzt in die Lage AS, von der sie ausgegangen war, wieder zurückkommt. Wenn man sich nun bei zwei geraden Linien, welche von einem gemeinschaftlichen Punkte auslaufen, auf dieselbe Weise den Uebergang von der Lage der einen Linie zur Lage der andern vorstellt, so

betrachtet man den Winkel, welchen beide Linien mit einander machen. Ein solcher Winkel heißt daher Linienwinkel, die beiden Linien, welche ihn bilden, seine Schenkel, und der Punkt, worin sich seine Schenkel schneiden, seine Spitze oder sein Scheitel.

Da bei dem Linienwinkel blos die Lage seiner Schenkel betrachtet wird, so ist klar, daß zwar die Spitze desselben als der eine Endpunkt seiner Schenkel betrachtet werden müsse, daß es aber für den Linienwinkel einerlei sey, an welchem Punkte man sich das andere Ende der Schenkel vorstelle; ja man kann sogar seine Schenkel nach jener Seite hin sich unbegrenzt denken, in welchem Falle die Ebene, worin der Linienwinkel liegt, durch die Schenkel in zwei Theile getrennt wird. Denjenigen Theil der Ebene, in welchem die Abweichung der Schenkel betrachtet wird, nenne man die Ebene des Linienwinkels. Winkel *) liegen in, auf oder neben einander, je nachdem ihre Ebenen in, auf oder neben einander liegen. Die Schenkel zweier Winkel liegen in einander, wenn sie auf einander und die Spitzen der Winkel in einander liegen.

Ein Winkel heißt flach, wenn der eine Schenkel die entgegengesetzte Lage des andern hat; hohl, wenn der eine Schenkel noch nicht in die entgegengesetzte Lage des andern gekommen ist; erhaben, wenn er schon über dieselbe hinaus ist. Ein Winkel aber, der kein flacher ist, ist ein hohler oder ein erhabener, je nachdem die Abweichung seiner Schenkel auf der Seite der Ebene, worin ihre Verlängerungen jenseits der Spitze nicht lie-

*) Später wird, wie hier, statt Linienwinkel, immer nur Winkel gesetzt, wo es zu keiner Undeutlichkeit Anlaß geben kann.

gen, oder auf der, worin sie liegen, betrachtet wird. Um daher in einem solchen Falle den Winkel völlig zu bestimmen, ist es nicht genug, die Lage seiner Schenkel anzugeben, sondern man muß noch überdieß bemerken, entweder auf welcher Seite der Ebene seine Ebene liege, oder ob man sich den hohlen oder erhabenen vorzustellen habe *).

Die Bezeichnung eines Winkels ist daher vollständig, wenn in derselben die Art desselben (ob er hohl, flach oder erhaben ist), seine Spitze, und von jedem Schenkel ein Punkt angegeben ist. Damit man aber leicht einsehe, welcher von den drei Punkten die Spitze bezeichne, ist man übereingekommen (welches auch mit dem unmittelbaren Hinweisen auf das Bild im Zusammenhange steht), diesen immer zwischen die beiden andern zu setzen. Oft genügt zur Angabe eines Winkels die Bezeichnung seiner Spitze allein, wenn sie nämlich nicht mehreren zugleich zukommt.

Zusatz 1. Wenn von einem Punkte, der in dem einen Schenkel eines Winkels liegt, nach einem Punkte, der in dem andern Schenkel liegt, eine gerade Linie gezogen wird, so liegen alle übrigen Punkte derselben, beim hohlen in seiner Ebene, beim flachen in seinen Schenkeln, beim erhabenen ausser seiner Ebene.

Zusatz 2. Wenn von der Spitze eines Winkels aus nach einem andern Punkte eine gerade Linie gezogen wird, so liegen alle Punkte derselben in oder ausser seiner Ebene, je nachdem der andere Punkt in oder ausser ihr liegt; gedachte Linie liegt demnach diesseits oder jenseits der Schen-

*) In der Folge hat man sich allemal den hohlen vorzustellen, wo das Gegentheil nicht ausdrücklich verlangt wird.

kel des Winkels, je nachdem dieser Punkt diesseits oder jenseits derselben liegt.

Zusatz 3. Wenn von einem Punkte, der beim hohlen Winkel in seiner Ebene, beim erhabenen ausser ihr liegt, nach einem Punkte, der in der Verlängerung des einen Schenkels jenseits der Spitze liegt, eine gerade Linie gezogen wird, so schneidet diese den andern Schenkel des Winkels.

Zusatz 4. Wenn eine Linie keinen Schenkel eines Winkels schneidet, so liegt sie in oder ausser der Ebene des Winkels, je nachdem zwei Punkte derselben in oder ausser der Ebene liegen.

Zusatz 5. Die Ebene eines Winkels liegt in der Ebene eines andern, wenn die Schenkel des erstern in der Ebene des letztern liegen; umgekehrt liegen die Schenkel eines Winkels in der Ebene eines andern, und können daher die Schenkel des letztern nicht schneiden, wenn die Ebene des erstern in der des letztern liegt.

Anmerk. Die Erläuterung der den Erklärungen angehängten Zusätze wird auch in diesem Paragraphen noch vermieden.

39. Erklärung.

Wenn (Bild 10.) die Linie AS anfängt, sich zu bewegen, durch die Lagen BS, CS, DS, ES, FS geht, und in ihre anfängliche Lage wieder zurückkommt, von da aber wieder fortfährt, sich zu bewegen, so kommt sie zum zweiten Male in die eben angezeigten Lagen. So kann auch bei einem Winkel die Abweichung seiner Schenkel erst eine ganze Kreisumdrehuug und dann noch eine Theilumdrehung in sich begreifen. Solche Winkel wollen wir Winkel der zweiten Gattung zur Unterscheidung von jenen nennen, die nur aus einer Theilumdrehung hervor-

gegangen sind, und die deßwegen Winkel der ersten Gattung *) heißen. Auf gleiche Weise sollen Winkel, welche aus zwei ganzen Kreisumdrehungen und noch einer Theilumdrehung entstanden sind, Winkel der dritten Gattung heißen, u. s. f.

40. Erklärung.

Wenn man sich zwei Winkel ASB, asb (Bild 11.) in einer solchen gegenseitigen Lage vorstellt, daß ihre einen Schenkel SA, sa in einander und sie selbst auf einander liegen, so ist man gezwungen, sich ihre andern Schenkel SB, sb entweder in einander, oder ausser einander vorzustellen; im ersten Falle werden beide Winkel einander gleich, im andern ungleich genannt. Von zwei ungleichen Winkeln heißt derjenige der kleinere, dessen zweiter Schenkel unter den erwähnten Umständen diesseits; derjenige der größere, dessen zweiter Schenkel jenseits dem zweiten Schenkel des andern Winkels liegend gedacht wird.

Die Gleichheit oder Ungleichheit zweier Winkel wird eben so wie oben (in 1. Erkl.) bei Linien bezeichnet.

Zusatz 1. Die Ebenen zweier gleicher Winkel, deren eine Schenkel in einander liegen, liegen in einander, sobald sie auf einander liegen.

Zusatz 2. Jeder Winkel ist sich selbst gleich.

Zusatz 3. Ein Winkel ist einem andern gleich, sobald die Schenkel des einen auf denen des andern liegen; demnach auch, sobald die Spitzen und von jedem Schenkel ein Punkt in einander liegen.

*) Wo nicht ausdrücklich das Gegentheil verlangt wird, sind immer nur Winkel der ersten Gattung zu verstehen.

Zusatz 4. Flache Winkel sind einander gleich, und der erhabene ist immer größer, der hohle kleiner, als sein flacher.

Da die Größe eines flachen Winkels konstant ist, wird sie in der Folge überall mit P bezeichnet.

Zusatz 5. Wenn ein Winkel größer ist, als ein anderer, so ist dieser kleiner als jener, und umgekehrt.

Zusatz 6. Ein Winkel ist kleiner als ein anderer, wenn die Spitzen beider in einander, die Schenkel des erstern aber diesseits denen des andern liegen.

Zusatz 7. Der Theil eines Winkels ist kleiner, als der ganze Winkel.

Zusatz 8. Wenn die Spitzen zweier Winkel, wovon der eine gleich oder größer ist als der andere, in einander, und ein Schenkel des ersten Winkels diesseits denen des andern liegt, so liegt der zweite Schenkel jenseits.

41. Erklärung.

Wenn zwei Winkel ASB, asb (Bild 11.) auf einander und ihre einen Schenkel SA, sa in einander liegen (wie in Bild 12.), so wird derjenige Winkel BSb, welchen die beiden andern Schenkel SB, sb bilden, und dessen Ebene ganz in der Ebene des einen Winkels liegt, der Unterschied jener beiden genannt. Der größere von beiden Winkeln heißt Minuend, der kleinere Subtrahend. Statt zu sagen: der Unterschied zweier Winkel wird hervorgebracht, sagt man auch: der Subtrahend wird von dem Minuenden weggenommen.

Wenn zwei Winkel ASB, asb (Bild 11.) neben einander, und ihre einen Schenkel SA, sa in einander liegen (wie in Bild 13.), so wird derjenige Winkel BSb,

welchen die beiden andern Schenkel SB, sb mit einander machen, und dessen Ebene die Ebenen beider in sich begreift, die Summe jener genannt. Jeder von den beiden Winkeln, welche die Summe bilden, heißt Summand. Winkel zu einander fügen, oder ihre Summe bilden, sind gleichbedeutende Ausdrücke.

Der Unterschied und die Summe zweier Winkel wird eben so wie oben (in 2. Erkl.) bei Linien bezeichnet.

Zusatz 1—9. Ergeben sich aus den (in 2.) aufgeführten, wenn man überall Winkel statt Linie setzt.

42. Erklärung.

Der Theil ASC (Bild 14.) eines Winkels ASB, welcher seinem ergänzenden Theile BSC gleich ist, heißt die Hälfte jenes ganzen Winkels. Einen Winkel halbiren heißt seine Hälfte hervorbringen.

Ein Winkel ASB (Bild 14.), welcher die Summe aus zwei andern einander gleichen Winkeln ASC und BSC ist, wird der doppelte eines jeden von diesen beiden genannt; jeder von diesen heißt, in Bezug auf seinen doppelten, der einfache. Ein Winkel wird verdoppelt, wenn sein doppelter hervorgebracht wird.

Der halbe und doppelte Winkel wird eben so wie oben (in 3. Erkl.) bei Linien bezeichnet.

Zusatz 1—4. Ergeben sich aus den (in 3.) aufgeführten, wenn überall Winkel statt Linie gesetzt wird.

43. Erklärung.

Wenn der eine Schenkel eines hohlen Winkels nach der entgegengesetzten Lage verlängert wird, so heißt der andere hohle Winkel, welcher dadurch entsteht, der Nebenwinkel des erstern. Und wenn beide Schenkel eines hohlen Winkels nach der entgegengesetzten Lage ver-

längert werden, so heißt der hohle Winkel, welcher durch die verlängerten Schenkel gebildet wird, der Scheitelwinkel des erstern.

Zusatz 1. Wenn ein Winkel eines andern Nebenwinkel ist, so ist letzterer auch Nebenwinkel des erstern. Und wenn ein Winkel eines andern Scheitelwinkel ist, so ist letzterer auch Scheitelwinkel des erstern.

Zusatz 2. Jeder hohle Winkel macht mit seinem Nebenwinkel einen flachen aus.

Zusatz 3. Scheitelwinkel haben immer einen gemeinschaftlichen Nebenwinkel.

44. Erklärung.

Ein hohler Winkel, der seinem Nebenwinkel gleich ist, heißt ein rechter; der kleiner ist als sein Nebenwinkel, heißt ein spitzer; der größer ist, ein stumpfer. Eine Linie, die mit einer andern rechte Winkel, d. h. gleiche Nebenwinkel bildet, steht senkrecht auf dieser andern.

Zusatz. Der rechte Winkel ist die Hälfte eines flachen.

45. Erklärung.

Ein Winkel, dessen Spitze in dem Mittelpunkte eines Kreises liegt, und dessen Schenkel die Kreislinie schneiden, heißt Zentriwinkel. Ein Winkel, dessen Spitze unter denselben Umständen in der Kreislinie liegt, heißt Peripheriewinkel.

46. Die (in 40. 41. und 42.) aufgestellten, auf Winkel sich beziehenden, Erklärungen haben mit den oben (in 1. 2. und 3.) für Linien gegebenen so große Aehnlichkeit, daß alle dort angeführten Sätze, wenn man nur überall Winkel statt Linien setzt, hier wieder erschei-

nen. Auf gleiche Weise ergeben sich alle hierher gehörigen Beweise und Auflösungen wörtlich aus obigen, wenn man nur Punkt mit Schenkel und Linie mit Winkel verwechselt; daher ist es unnöthig, sie hier von neuem zu zergliedern, um so mehr, da die Auffindung und der Gebrauch der zugehörigen Beweis- und Auflösungsmittel, wegen ihrer Aehnlichkeit mit den dortigen, keine Schwierigkeit mehr haben kann. Selbst die hier vorkommenden Bezeichnungen lassen sich von obigen abhängig machen, wenn man jene Buchstaben, welche dort die Endpunkte einer Linie bezeichneten, hier an die Schenkel des entsprechenden Winkels, und außerdem nach Erforderniß r. [illegible]) einen der Buchstaben S, s, σ an seine Spitze setzt; dann ergeben sich die hier vorkommenden Bezeichnungen aus den dortigen, wenn man, wo ein einziger Buchstabe steht, an denselben, wo dort zwei stehen, zwischen dieselben den setzt, welcher die Spitze bezeichnet.

Da hier überall Flächensysteme vorkommen, so hat die Verbindung, außer den oben bei Liniensystemen betrachteten Elementen, auch noch die Richtung ihrer Ebenen zu berücksichtigen, was die (in 40. und 41.) gegeben Erklärungen voraussetzen, und (nach XXI. i.) allemal geschehen darf.

47. Lehrsatz.

Wenn zwei Winkel einem dritten gleich sind, so sind sie selbst einander gleich.

Zusatz 1. Wenn die eine Hälfte eines Winkels einem andern Winkel gleich ist, so ist es auch die andere Hälfte. (aus 42. Erkl.)

Zusatz 2. Wenn die einen Hälften zweier Winkel einander gleich sind, so sind es auch die andern. (siehe Zus. 1.)

48. Lehrsatz.

Wenn von zwei gleichen Winkeln der eine größer ist als ein dritter, so ist es auch der andere.

Zusatz 1. Ein Winkel ist größer als ein anderer, wenn dieser ein Theil von einem dem erstern gleichen ist. (siehe 40. Zus. 7.)

Zus. 2. Wenn die eine Hälfte eines Winkels grösser als ein anderer ist, so ist es auch die andere Hälfte. (siehe 42. Erkl.)

49. Lehrsatz.

Wenn von zwei gleichen Winkeln der eine kleiner ist als ein dritter, so ist es auch der andere.

Zusatz 1. Ein Winkel ist größer als ein anderer, wenn dieser gleich ist einem Theil von jenem. (siehe 40. Zus. 7.)

Zusatz 2. Wenn die eine Hälfte eines Winkels größer als die eine Hälfte eines andern ist, so ist auch die andere Hälfte von jenem Winkel größer als von diesem.

50. Lehrsatz.

Wenn ein Winkel größer ist als ein anderer, und dieser wieder größer als ein dritter, so ist jener erste größer als dieser dritte.

Zusatz 1. Wenn ein Winkel größer ist als ein anderer, so ist er auch größer als ein Theil dieses andern. (siehe 40. Zus. 7.)

Zusatz 2. Wenn der Theil eines Winkels größer ist als ein anderer Winkel, so ist auch jener ganze grösser als dieser. (siehe 40. Zus. 7.)

Zusatz 3. Der erhabene Winkel ist immer größer als der hohle. (aus 40. Zus. 4.)

51. Lehrsatz.

Die Summe zweier Winkel sind einander gleich, wenn die Summanden der einen denen der andern beziehlich gleich sind.

Zusatz 1. Winkel sind gleich, wenn ihre Hälften gleich sind. (siehe 47. Zus. 2.)

Zusatz 2. Von zwei Winkeln ist der größere doppelt genommen gleich der Summe aus dem Unterschiede und der Summe beider; der kleinere doppelt genommen gleich dem Unterschiede aus der Summe und dem Unterschiede beider. (siehe 41. Zus. 4 und 5.)

Zusatz 3. Wenn (Bild 15.) in einem Winkel ASB die Stücke ASD und BSE einander gleich sind, so sind es auch die Stücke ASE und BSD.

Zusatz 4. Wenn (Bild 15.) von einem Winkel ASB gleiche Stücke ASD, BSE abgeschnitten sind, und überdieß der Winkel DSE in der Linie SF halbirt ist, so ist auch der ganze Winkel ASB in der Linie SF halbirt. (siehe 42. Erkl.)

Zusatz 5. Wenn A, B, C Winkel von der Art bezeichnen, daß $A - B = C$, so ist auch $A = B + C$. (siehe 41. Zus. 4.)

Zusatz 6. Wenn A, B, C, D Winkel von der Art bezeichnen, daß $A - B = C - D$, so ist auch $A + D = B + C$. (siehe 41. Zus. 8. und vorigen Zus.)

Zusatz 7. Die Summe zweier ganzen Winkel ist gleich der doppelten Summe ihrer Hälften. (siehe 42. Zus. 3.)

52. Lehrsatz.

Die Unterschiede zweier Winkel sind einander gleich, wenn Minuend und Subtrahend des einen denen des andern beziehlich gleich sind.

Zusatz 1. Wenn überdieß der Subtrahend des einen Unterschiedes die Hälfte des Minuenden ist, so ist dieß auch bei dem andern Unterschiede der Fall. (nach 47. Lehrs.)

Zusatz 2. Wenn (Bild 15.) in einem Winkel ASB die Stücke ASE und BSD gleich sind, so sind es auch die Stücke ASD und BSE.

Zusatz 3. Wenn (Bild 15.) ein Winkel ASB in SF halbirt ist, und überdieß die Stücke ASD und BSE gleich sind, so ist auch DSE in SF halbirt. (siehe 42. Erkl.)

Zusatz 4. Wenn (Bild 15.) in einem Winkel ASB die Stücke ASE und BSD gleich sind, und überdieß DSE in SF halbirt ist, so ist auch ASB in SF halbirt. (siehe 42. Erkl.)

Zusatz 5. Wenn A, B, C Winkel von der Beschaffenheit bezeichnen, daß $A + B = C$, so ist auch $A = C - B$ und $B = C - A$. (siehe 41. Zus. 6.)

Zusatz 6. Wenn A, B, C, D Winkel von der Beschaffenheit bezeichnen, daß $A + B = C + D$, so ist auch $A - D = C - B$ oder $D - A = B - C$, je nachdem $A > D$ oder $A < D$ ist. (siehe 41. Zus. 8. und vorigen Zus.). Hierbei können A und B, so wie C und D mit einander verwechselt werden.

Zusatz 7. Der Unterschied zweier ganzen Winkel ist gleich dem doppelten Unterschiede ihrer Hälften. (siehe 42. Zus. 4.)

Zusatz 8. Wenn zwei Winkel einander gleich sind,

so sind es auch ihre Nebenwinkel. (siehe 43. Zus. 2. und 40. Zus. 4.)

Zusatz 9. Wenn ein Winkel einem andern gleich ist, so bildet jeder mit dem Nebenwinkel des andern einen flachen. (siehe Zus. 8. und 43. Zus. 2.)

Zusatz 10. Wenn die Summe zweier Winkel einen flachen bildet, so ist jeder dem Nebenwinkel des andern gleich. (siehe 40. Zus. 4. und 43. Zus. 2.)

Zusatz 11. Wenn die Summe zweier Winkel einen flachen bildet, so thut dieß auch die Summe ihrer Nebenwinkel. (siehe 40. Zus. 4. und vorigen Zus.)

Zusatz 12. Jeder Winkel ist seinem Scheitelwinkel gleich. (siehe Zus. 8. und 45. Zus. 2.)

Zusatz 13. Wenn ein Winkel gleich oder größer als ein anderer ist, so gilt dasselbe auch von seinem Scheitelwinkel. (aus Zus. 12. nach 47. Lehrs.)

Zusatz 14. Wenn ein Winkel gleich oder größer als ein anderer ist, so ist auch der Scheitelwinkel des erstern gleich oder größer als der des letztern. (siehe Zus. 12.)

53. Lehrsatz.

Die Summe zweier Winkel ist größer als die Summe zweier andern, wenn der eine Summand in beiden gleich, der andere aber in jener größer ist als in dieser.

Anmerk. Obiger und der in 56. enthaltene Lehrsatz ist nur dann allgemein wahr, wenn man darin übereinkommt, Winkel einer höhern Gattung größer als die einer niedern zu nennen.

Zusatz 1. Wenn (Bild 15.) in einem Winkel ASB das Stück ASD größer als BSE ist, so ist auch ASE größer als BSD.

Zusatz 2. Wenn A, B, C Winkel von der Art bezeichnen, daß entweder $A - B > C$ oder $A - B < C$, so ist im ersten Falle $A > B + C$, im andern $A < B + C$. (siehe 41. Zus. 4.)

Zusatz 3. Wenn A, B, C, D Winkel von der Art bezeichnen, daß $A - B > C - D$, so ist auch $A + D > B + C$. (siehe Zus. 2. und 41. Zus. 8.)

54. Lehrsatz.

Der Unterschied zweier Winkel ist größer als der zweier andern, wenn die Subtrahenden in beiden gleich, der Minuend aber in jenem größer ist als in diesem.

Zusatz 1. Wenn (Bild 15.) in einem Winkel ASB das Stück ASE größer ist als BSD, so ist auch ASD größer als BSE.

Zusatz 2. Wenn A, B, C Winkel von der Beschaffenheit bezeichnen, daß $A + B > C$, so ist auch $A > C - B$, wobei $C > B$ vorausgesetzt wird; ist aber $A + B < C$, so ist auch $A < C - B$ (siehe 41. Zus. 6.). Hierbei können A und B mit einander verwechselt werden.

Zusatz 3. Wenn A, B, C Winkel von der Beschaffenheit bezeichnen, daß $A + B > C + D$ so ist auch $A - D > C - B$ wenn $C > B$, oder $D - A < B - C$ wenn $C < B$ (siehe Zus. 2. und 41. Zus. 8.). Hierbei können A und B, so wie C und D mit einander verwechselt werden.

55. Lehrsatz.

Der Unterschied zweier Winkel ist kleiner als der zweier andern, wenn die Minuenden in beiden gleich, der Subtrahend aber in jenem größer ist als in diesem.

Zusatz 1. Nimmt man noch überdieß an, daß der Subtrahend des zuletzt genannten Unterschiedes die Hälfte seines Minuenden sey, so folgt, daß der andere Unterschied kleiner als sein Subtrahend ist. (nach 49. Lehrs. und 50. Lehrs.)

Zusatz 2. Der größere von zwei ungleichen sich ergänzenden Theilen eines Winkels ist größer als die Hälfte eines dem letztern gleichen Winkels; der kleinere dagegen kleiner. (rein indirekt aus Zus. 1. und 52. Zus. 1.)

Zusatz 3. Wenn ein Winkel größer ist als ein anderer, so ist der Nebenwinkel des erstern kleiner als der des letztern. (siehe 43. Zus. 1.)

Zusatz 4. Wenn ein Winkel größer als ein anderer ist, so ist die Summe aus jenem Winkel und dem Nebenwinkel des letztern größer, die Summe aus dem zweiten Winkel und dem Nebenwinkel des erstern kleiner als ein flacher. (siehe Zus. 3. und 43. Zusatz 2.)

Zusatz 5. Wenn die Summe zweier Winkel größer oder kleiner als ein flacher ist, so ist jeder von diesen Winkeln größer oder kleiner als der Nebenwinkel des andern. (siehe 43. Zus. 2.)

Zusatz 6. Wenn die Summe zweier Winkel größer als ein flacher ist, so ist die Summe ihrer Nebenwinkel kleiner als ein flacher, und umgekehrt. (siehe Zus. 5.)

56. Lehrsatz.

Die Summe zweier Winkel ist größer als die zweier andern, wenn jene beiden Summanden beziehlich größer sind als diese.

Zusatz 1. Wenn die Hälfte eines Winkels größer ist als die Hälfte eines andern, so ist auch jener ganze größer als dieser. (siehe 48. Zus. 2).

Zusatz 2. Die Hälften gleicher Winkel sind gleich; die Hälfte eines größern Winkels ist größer als die Hälfte eines kleinern. (rein indirekt aus Zus. 1. und 51. Zus. 1.)

Zusatz 3. Alle rechte Winkel sind einander gleich; die Hälfte eines hohlen Winkels ist kleiner, die eines erhabenen größer als ein rechter. (siehe Zus. 2. und 40. Zus. 4.)

Da die Größe eines rechten Winkels konstant ist, so wird sie in der Folge immer nur mit Q bezeichnet.

Zusatz 4. Durch einen Punkt, der in einer geraden Linie liegt, ist auf diese nur eine einzige senkrechte möglich. (siehe Zus. 3.)

Zusatz 5. Der stumpfe Winkel ist immer größer als ein rechter, der spitze kleiner. (siehe 55. Zus. 2. und 44. Erkl.)

Zusatz 6. Jeder Winkel, der größer als ein rechter Winkel ist, ist stumpf; der kleiner als ein rechter ist, spitz. (rein indirekt aus Zus. 3. und Zus. 5.)

57. Aufgabe.

Einen Winkel zu beschreiben, der einem andern gegebenen gleich ist.

Anmerk. Die hierher gehörigen Auflösungen dienen zur Erklärung der verschiedenen Winkelmesser.

Zugabe 1. Einen Winkel zu finden, der dem Unterschiede zweier gegebenen gleich ist. (aus 52. Lehrs.)

Zugabe 2. Einen Winkel zu finden, der der Summe zweier gegebenen gleich ist. (aus 51. Lehrs.)

Zugabe 3. Einen Winkel zu verdoppeln. (aus 42. Erkl.)

58. Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Zugabe 1. Zwei Winkel zu finden, deren Summe und deren Unterschied gegeben ist. (aus 51. Zus. 2.)

Zugabe 2. Einen rechten Winkel zu bilden. (aus 44. Erkl.)

59. Alle hier vorgetragenen Sätze, die Winkel betreffend, lassen sich ganz so wie die oben für Linien aufgestellten erweitern. Auch das Maß der Winkel bietet dieselben Betrachtungen dar, welche bei Linien Statt fanden, so daß man dort nur überall Winkel statt Linie setzen darf. Dabei ist aber noch der besondere Umstand zu erwägen, daß hier die Größe des Grundtheils nicht wie dort willkührlich angenommen, sondern dazu immer die konstante Größe des flachen oder rechten Winkels gebraucht wird. Aus dieser Ursache ist bei den Winkelgemäßen nur die Eintheilung des Grundtheils in kleinere Winkel, dieser in noch kleinere u. s. f. zu berücksichtigen; daher fällt auch die Betrachtung gleichartiger Gemäße hier ganz weg.

Da übrigens gedachte Erweiterungen sowohl als die Beurtheilung der Winkelgemäße, nach dem was oben von demselben Gegenstande bei Linien gesagt worden ist, keine Schwierigkeiten verursachen, und überdieß keinen bedeutenden Einfluß auf spätere Untersuchungen haben, so genügt es, hier darauf aufmerksam gemacht zu haben.

§. 5.

Von der gegenseitigen Lage mehrerer Linien im Allgemeinen.

60. Erklärung.

Wenn (Bild 16) zwei Linien AB und CD von einer dritten EF durchschnitten werden, so entstehen an jedem Durchschnittspunkte G und H vier Winkel, die sich parweise wie folgt ordnen lassen.

a) Vier Pare, in welchen beide Winkel auf einer Seite der schneidenden Linie und auf gleichen Seiten der ge-

schnittenen Linien liegen. Diese sind: AGE und CHE, AGF und CHF, BGE und DHE, BGF und DHF.

b) Vier Pare, in welchen beide Winkel auf verschiedener Seite der schneidenden Linie und auf ungleichen der geschnittenen Linien liegen. Diese sind: ACF und DHE, BGF und CHE, AGE und DHF, BGE und CHF.

c) Vier Pare, in welchen beide Winkel auf einer Seite der schneidenden Linie und auf ungleichen Seiten der geschnittenen Linien liegen. Diese sind: AGF und CHE, BGF und DHE, AGE und CHF, BGE und DHF.

d) Vier Pare, in welchen beide Winkel auf verschiedener Seite der schneidenden Linie und auf gleichen Seiten der geschnittenen Linie liegen Diese sind: AGE und DHE, BGE und CHE, AGF und DHF, BGF und CHF.

Je zwei Winkel, welche in einem der in a) und b) enthaltenen Pare vorkommen, sollen ähnlichliegende; solche aber, welche in einem der in c) und d) enthaltenen Pare vorkommen, unähnlichliegende heißen. Ueberdieß werden solche Winkel, wie AGE, BGE, CHF, DHF, äußere; solche, wie AGF, BGF, CHE, DHE, innere genannt.

61. Lehrsatz.

Wenn irgend ein Winkel seinem ähnlichliegenden gleich ist, so ist auch jeder andere seinem ähnlichliegenden gleich, und je zwei unähnlichliegende machen zusammen einen flachen Winkel aus.

Vorbereit. Da es acht Pare ähnlichliegender Winkel giebt, und jedes derselben als Grund des Lehrsatzes gewählt werden kann, so begreift dieser eigentlich acht andere in sich, von denen sich einer wie der andere behan-

deln läßt. Außer dem im Grunde enthaltenen Pare ähnlichliegender Winkel giebt es noch 7 andere ähnlichliegende und acht Pare unähnlichliegender Winkel, welche die Folgen des Lehrsatzes ausmachen; demnach sind für jeden Grund 15 von einander verschiedene Folgen zu betrachten. Jede solche Folge läßt sich aber mit Hülfe der (in 52. Zus. 8 — 12.) vorhandenen Beweismittel entweder unmittelbar aus dem Grunde oder aus einer schon erwiesenen Folge herleiten, daher ist es unnöthig, diese Beweise noch besonders aufzustellen.

Zusatz. Stellt man nur solche Winkel zusammen, die auf einer Seite der schneidenden Linie liegen, so verwandelt sich obiger Lehrsatz in folgenden: Wenn auf einer Seite der schneidenden Linie ein äußerer Winkel seinem ähnlichliegenden innern gleich ist, so ist auf dieser sowohl als auf der andern Seite jeder äußere Winkel seinem ähnlichliegenden innern gleich, und die Summe der beiden innern oder der beiden äußern Winkel bildet einen flachen.

62. Lehrsatz.

Wenn die Summe zweier unähnlichliegender Winkel einen flachen bildet, so geschieht dasselbe bei jedem solchen Pare und je zwei ähnlichliegende sind einander gleich.

Vorbereit. Der Beweis dieses Lehrsatzes läßt sich ganz wie der des vorhergehenden führen; er wird aber durch die Bemerkung noch sehr vereinfacht, daß es hinlänglich ist, einen einzigen Grund des vorhergehenden Lehrsatzes darzuthun.

Zusatz 1. Stellt man nur solche Winkel zusammen, die auf einer Seite der schneidenden Linie liegen, so verwandelt sich vorstehender Lehrsatz in folgenden: Wenn auf einer Seite der schneidenden Linie die Summe zweier in-

nern oder äußern Winkel einen flachen bildet, so thun dieß auf jeder Seite je zwei solche Winkel, und jeder äußere ist seinem ähnlichliegenden innern gleich.

Zusatz 2. Durch Zusammenziehung beider vorstehender Lehrsätze gelangt man zu folgenden: Wenn irgend ein Winkel einem seiner ähnlichliegenden gleich ist, oder mit einem seiner unähnlichliegenden einen flachen bildet, so ist jeder Winkel seinem ähnlichliegenden gleich, und jeder bildet mit seinem unähnlichliegenden einen flachen Winkel.

63. Lehrsatz.

Wenn auf einer Seite der schneidenden Linie ein äußerer Winkel größer ist als sein ähnlichliegender innerer, so ist auf derselben Seite auch der andere äußere größer als sein ähnlichliegender innerer, und die Summe der beiden innern ist kleiner, die der äußern größer als ein flacher Winkel.

Vorbereit. Da sich die Folgen dieses Lehrsatzes aus seinem Grunde unmittelbar (nach 55. Zus. 3 und 4.) herleiten lassen, so bedarf sein Beweis keiner weitern Auseinandersetzung.

64. Lehrsatz.

Wenn auf einer Seite der schneidenden Linie ein äußerer Winkel kleiner ist als sein ähnlichliegender innerer, so ist auf derselben Seite auch der andere äußere kleiner als sein ähnlichliegender innerer, und die Summe der beiden innern ist größer, die der beiden äußern kleiner als ein flacher Winkel.

Vorbereit. Dieser Lehrsatz läßt sich ganz wie der vorhergehende beweisen.

Zusatz. Wenn eines von den vieren der hier oder der im vorhergehenden Lehrsatze angegebenen Merkmalen auf einer Seite der schneidenden Linie Statt findet, so müssen auch die drei andern auf derselben Seite der schneidenden Linie Statt finden. (ergiebt sich rein indirekt aus beiden vorstehenden Lehrsätzen in Verbindung mit 62. Zus. 2.)

65. Lehrsatz.

Wenn auf einer Seite der schneidenden Linie die vier (in 63. Lehrs.) aufgestellten Merkmale Statt finden, so finden auf der andern Seite die vier (in 64. Lehrs.) aufgestellten Statt; und umgekehrt.

Vorbereit. Als Grund dieses Lehrsatzes kann jedes der (im 63. Lehrs.) angeführten Merkmale gewählt werden, zur Folge eines der (im 64. Lehrs.) angegebenen; oder umgekehrt. Uebrigens bedarf der Gang dieses Beweises keine nähere Beschreibung.

Zusatz. Wenn daher irgend ein Winkel seinem ähnlichliegenden nicht gleich ist, oder die Summe irgend zweier unähnlichliegenden keinen flachen bildet, so ist kein Winkel seinem ähnlichliegenden gleich und keine Summe zweier unähnlichliegenden bildet einen flachen. (siehe 63. Lehrs. und 64. Lehrs.)

66. Erklärung.

Wenn (Bild 16.) an einer schneidenden Linie FG eines der (im 62. Zus. 2.) aufgeführten Merkmale Statt findet, so werden die geschnittenen Linien AB, CD in Bezug auf diese schneidende Linie gleichlaufend genannt; findet aber keines Statt, welches (nach 65. Zus.) geschieht, sobald eines nicht da ist, so werden die geschnittenen Linien AB, CD in Bezug auf die schneidende FG ungleich-

laufend genannt. Ungleichlaufende Linien nennt man nach der Seite der schneidenden, auf welcher die (im 63. Lehrs.) aufgezählten Merkmale angetroffen werden einwärtslaufend; und nach der Seite, auf welcher die (im 64., Lehrs.) aufgeführten Merkmale zu finden sind, auswärtslaufend.

Zusatz. Ungleichlaufende Linien sind immer nach einer Seite der schneidenden Linie einwärtslaufend, nach der andern auswärtslaufend. (siehe 65. Lehrs.)

67. Oben wurde den besondern Verbindungen, welche die Beweismittel von den einzelnen Theilen in verschiedenen Systemen forderten, dadurch ein Genüge gethan, daß eine solche allgemeine Verbindung aufgesucht wurde, aus der sich alle jene besondern Verbindungen nach und nach von selbst ergaben. Wenn aber, wie dieß in den zunächst folgenden Lehrsätzen der Fall ist, die Theile, welche verbunden werden sollen, in einem und demselben Systeme liegen, so müßte ja im Geiste jenes Verfahrens dieses eine System mit sich selbst verbunden werden. So auffallend dieses Resultat der Analogie beim ersten Anblick auch scheinen mag, so einleuchtend wird es bei einer nähern Betrachtung; denn der Begriff eines Raumsystems kann offenbar, ganz so wie er ist, noch einmal gesetzt werden, so daß die Theile, welche vorher nur in einem Systeme sich vorfanden, in einem zweiten wieder erscheinen. Ein solches Wiederholen eines Raumsystems wird die Nachbildung desselben genannt. In diesem Sinne heißt das ursprüngliche System das Vorbild, und das nach ihm entstandene sein Nachbild.

Die Indentität des Vorbildes und Nachbildes ermächtigt die Nachbildung, alle sich entsprechenden Theile in beiden Systemen einander gleichzusetzen, und diese Gleichungen als neu hinzugekommene Gründe des Lehr-

satzes zu behandeln. Aus diesen neu hinzugekommenen Gründen in Verbindung mit den anfänglichen lassen sich (nach den in 6. 7. 8. 47. 48. und 49. aufgestellten Lehrsätzen) allemal Beweisfolgen herleiten, die dann die Verbindung beider Systeme und den Gang des Beweises an die Hand geben.

68. Derselbe Zweck, welcher durch die Nachbildung beabsichtigt wird, läßt sich aber sehr oft noch auf einem andern Wege erreichen. So wie nämlich durch die Verbindung aus mehreren Raumsystemen ein einziges gebildet wird, so kann auch umgekehrt ein einziges in mehrere andere zerlegt werden, wenn nur hier nach der Trennung, so wie dort nach der Verbindung, alle Theile der abgesonderten Systeme einerlei Beschaffenheit mit den entsprechenden Theilen des zusammengesetzten Systems haben. Eine solche Zerlegung eines Systems in mehrere andere soll die Vertheilung des erstern heißen. In diesem Sinne wird jenes System das ganze und diese die Theilsysteme genannt. Wenn sich nun die Vertheilung so anordnen läßt, daß jene Linien oder Winkel, welche im ganzen Systeme eine besondere Verbindung fordern, in verschiedenen Theilsystemen erscheinen, so kann die allgemeine Verbindung der Theilsysteme alle jene besondern Verbindungen nach sich ziehen.

Hieraus erhellet, daß die Vertheilung befugt ist, jeden Theil eines Theilsystems dem entsprechenden des ganzen Systems gleichzusetzen, und diese Gleichungen während des Beweises als neu hinzugekommene Gründe des Lehrsatzes zu behandeln. Aus diesen neu hinzugekommenen Gründen, welche sich immer auf das ganze und auf ein Theilsystem beziehen, in Verbindung mit den anfänglichen, die blos das ganze System angehen, lassen sich allemal Beweisfolgen herleiten, welche lediglich die Theilsysteme

umfassen. Diesen Beweisfolgen gemäß muß hierauf die allgemeine Verbindung der Theilsysteme angeordnet und und der Beweis geführt werden.

69. Lehrsatz.

Gleichlaufende Linien können auf keiner Seite der schneidenden Linie sich schneiden.

Grundsystem: Bild 16.

Gründe:	Folge:
1) AGF = DHE 2) BGF = CHE.	AB und CD können sich weder auf der einen noch auf der andern Seite der schneidenden Linie EF schneiden.

Vorbereit. Als Gründe können hier alle (in 62. Zus. 2.) erwähnten Merkmale auftreten, aus denen aber der Kürze halber blos zwei, die zum Beweise hinreichend sind, herausgehoben werden.

Da das Begründungsmittel für die Folge schwer zu erkennen ist, so muß der Beweis blos synthetisch geführt werden. Die Gründe aber leiten zu besondern Verbindungen, die eine Nachbildung oder eine Vertheilung nothwendig machen. Beide führen zum Zwecke; letztere ist ihrer größern Einfachheit wegen in nachstehendem Beweise vorgezogen worden.

Wenn die Vertheilung vorgenommen, und hierauf eine allgemeine Verbindung der Theilsysteme nach schon bekannten Regeln aufgesucht wird, so ergiebt sich der Beweis leicht bis zur sechsten Beweisfolge, von da aber ist man gezwungen, ihn indirekt fortzuführen.

Beweis.

Vertheil. Man stelle sich das obige Raumsystem durch die Linie EF in zwei Theilsysteme (Bild 17.) getrennt vor, worin 1) hg = HG und bg = HG, 2) agf = AGF und dhe = DHE, 3) che = CHE und bgf = BGF ist, (nach 68.)

Bew.folge 1) aus Vertheil. 1.
so hat man hg = bg, (nach 6. Lehrs.)
2) aus Grund 1. und Vertheil. 2
ferner agf = dhe (nach 47. Lehrs.)
3) aus Grund 2. und Vertheil. 3.
und che = bgf. (nach 47. Lehrs.)

Verbind. Wenn nun 1) die Punkte g, b in einander, und sowohl 2) die Linien gh, bg als 3) die Winkel agf, dhe auf einander lägen.

Bew.folge 4) aus Bew.folge 1. und Verbind. 1. und 2.
so müßte h in g, (nach 1. Erkl.)
5) aus Bew.folge 2. und Verbind.
ferner ga auf bd (nach 40. Erkl.)
6) aus Verbind. 2 und 3. und Bewf. 3 und 4.
und hc auf gb liegen. (nach 40. Erkl.)
7) aus Folge.
Wollte man nun annehmen, daß AB und CD jenseits A und C verlängert sich schnitten, (nach XXXVI. c.)
8) aus Bew.folge 7. und Vertheil.
so müßte man auch annehmen, daß ga und hc jenseits a und c verlängert sich schnitten; (nach 68.)
9) aus Verbind. 1. und Bewf. 4. 5. 6. und 8.

demnach auch, daß hd und gb jenseits d und b verlängert sich schnitten, (nach XVII. d.)

Bew.folge 10) aus Bew.folge 9. und Vertheil.
und nun auch, daß AB und CD jenseits B und D verlängert sich schnitten, (nach 68.)

11) aus Bew.folge 7 und 10.
und es entstünde ein Widerspruch. (nach XVII. d.)

Schluß. aus Bew.folge 11.
Da ganz auf dieselbe Weise die Annahme, wo AB und CD nach B und D verlängert sich schnitten, widersprochen wird, so können sich diese Linien nach keiner Seite hin schneiden. (nach XXXVI. c.)

70. Es tritt, so wie in den nächstfolgenden Lehrsätzen auch später häufig der Fall ein, daß Sätze deßwegen nicht als Beweismittel dienen können, weil die Raumsysteme, auf welche sie sich beziehen, nicht vollständig in denen des zu erweisenden Lehrsatzes enthalten sind. Bedenkt man aber, daß es immer erlaubt ist, zu einem Raumsysteme neue Theile hinzuzufügen, wenn nur die Beschaffenheit der ursprünglichen von den hinzugefügten nicht abhängig gemacht wird, so wird man darauf geleitet, dem gedachten Uebelstande abzuhelfen. Ein solches Hinzufügen eines oder mehrerer Theile zu einem gegebenen Raumsysteme mag die Vermehrung desselben, und die hinzugefügten Theile Hülfstheile heißen. Bei der Vermehrung sind folgende Regeln zu beobachten:

a) Die Ausführbarkeit der Vermehrung muß jedesmal durch vorausgegangene Betrachtungen ausser Zweifel gesetzt worden seyn.

b) Die Merkmale, welche durch die Vermehrung den Hülfstheilen beigelegt werden, sind während des Beweises, wenn sie nicht schon im Grundsysteme enthalten sind, als Gründe des Lehrsatzes zu betrachten.

c) Wenn die äußere Beziehung der Hülfstheile zu dem ursprünglichen Systeme (siehe XXX. c.) weder durch die Vermehrung, noch durch die Beweisfolgen völlig erkannt wird, so muß der Beweis an so vielen Zusammenstellungen, als deren verschiedene gedacht werden können, wiederholt betrachtet werden. Dieß geschieht am bequemsten, wenn für jede solche Zusammenstellung ein eigenes Grundsystem aufgestellt wird.

71. Lehrsatz.

Ungleichlaufende Linien können sich auf der Seite der schneidenden Linie, auf welcher sie auswärtslaufend sind, nicht schneiden.

Grundsystem: Bild 18.

Grund:	Folge:
BGE < DHE.	GB und HD können sich jenseits B und D verlängert nicht schneiden.

Vorbereit. Als Gründe können die (in 64. Lehrs.) angegebenen Merkmale aufgestellt werden, von denen aber ein einziger zu dem Beweise hinreichend ist.

Sucht man aus dem Grunde (nach 40. Erkl.) Beweisfolgen herzuleiten, so wird man entweder zu einer Nachbildung oder zu einer Vermehrung des Systems geleitet. Beide Vorkehrungen führen zum Zwecke; letztere ist in nachstehendem Beweise gewählt worden.

Beweis.

Vermehr. Wenn durch den Punkt G eine Linie GK so gezogen würde, daß

EHD EGK = ~~EGD~~, (nach 57. Aufg.)

Bew.folge 1) aus Grund und Vermehr.
so wäre EGB < EGK, (nach 48. Lehrs.)

2) aus Bew.folge 1.
daher läge GB diesseits GE und GK, (nach 40. Erkl.)

3) aus Bew.folge 2.
also EGB in EGK; (nach 38. Zus. 5.)

4) aus Vermehr.
ferner wären GK und HD an EF gleichlaufend (nach 66. Erkl.)

5) aus Bew.folge 4.
und könnten sich daher jenseits K und D verlängert nicht schneiden, (nach 69. Lehrs.)

6) aus Bew.folge 5.
also läge EGK in EHD, (nach 38. Zus. 4 und 5.)

7) aus Bew.folge 3 und 6.
und nun auch EGB in EHD, (nach VIII. a.)

Schluß. aus Bew.folge 7.
Folglich können sich GB und HD

jenseits B und D verlängert nicht schneiden. (nach 38. Zus. 5.)

Zusatz. Geschnittene Linien, welche sich auf einer Seite der schneidenden Linie schneiden, sind auf dieser Seite einwärtslaufend. (rein indirekt aus 69. Lehrs. und 71. Lehrs.)

72. Lehrsatz.

Ungleichlaufende Linien müssen sich allemal auf der Seite der schneidenden Linie, auf welcher sie einwärtslaufend sind, schneiden.

Grundsystem: Bild 19.

Grund:	Folge:
EHC + FGA < P	HC und GA müssen sich jenseits A und C verlängert allemal schneiden.

Vorbereit. Als Gründe können die (in 63. Lehrs.) angeführten Merkmale aufgestellt werden, von denen aber ein einziger zu dem Beweise hinreichend ist.

Um aus dem Grunde Beweisfolgen herleiten zu können, wird eine Verbindung der darin enthaltenen Winkel, und um diese bewerkstelligen zu können, eine Nachbildung des Systems verlangt. Nachdem hierauf der Beweis synthetisch versucht worden ist, wird man gezwungen, ihn indirekt fortzusetzen, weil alle Mühe, auf dem direkten Wege zu dem Ziele zu gelangen, vergeblich ist. Dabei wird man zu einer Vermehrung des Systems geleitet.

Beweis.

Nachbild. Man stelle sich dasselbe System noch einmal vor, worin die Punkte a, c, e, f, g, h den Punkten A, C, E, F, G, H beziehlich entsprechen und also 1) gh = GH, 2) ehc = EHC und 3) fga = FGA ist, (nach 67.)

Bew.folge 1) aus Grund und Nachbild. 2.
so ist ehc + FGA < P (nach 49. Lehrs. und 51. Lehrs.)

2) aus Grund und Nachbild. 3.
und EHC + fga < P. (nach 49. Lehrs. und 51. Lehrs.)

Verbind. Wenn nun (Bild 20.) 1) die Punkte h, G in einander, 2) die Linien hc, GA auf einander und 3) die Winkel ehc, FGA neben einander lägen,

Bew.folge 3. aus Verbind. und Bew.folge 1.
so müßte he diesseits GE und GA (nach 38. Erkl.)

4) aus Verbind. und Bew.folge 2.
und GF diesseits hf und hc, (nach 38. Erkl.)

5) aus Verbind. und Bew.folge 3.
daher ehc in EGA (nach 38. Zus. 5.)

6) aus Verbind. und Bew.folge 4.
und FGA in fhc liegen. (nach 38. Zus. 5.)

7) aus Folge:
Wollte man nun annehmen, daß GA und HC jenseits A und C ver-

längert sich nicht schnitten, (nach XXXVI. c.)

Bew.folge 8) aus Nachbild. und Bew.folge 7.
so müßte man auch annehmen, daß ga und hc jenseits a und c verlängert sich nicht schnitten, (nach 67.)

9) aus Bew.folge 7.
demnach auch, daß EGA in EHC und FHC in FGA, (nach 38. Zus. 4 und 5.)

10) aus Bew.folge 8.
und eben so, daß ega in ehc und fhc in fga, (nach 38. Zus. 4 und 5.)

11) aus Bew.folge 5 und 10.
mithin, daß ega in EGA, (nach VIII. a.)

12) aus Bew.folge 9 und 11.
und nun, daß ega in EHC läge, (nach VIII. a.)

13) aus Bew.folge 12.
sonach könnten sich ga und HC jenseits a und C verlängert nicht schneiden; (nach 38. Zus. 5.)

14) aus Bew.folge 3 und 9.
ferner müßte he diesseits HE und HC (nach X. a.)

15) aus Bew.folge 4 und 10.
und GF diesseits gf und ga liegen. (nach X. a.)

Vermehr. Würde nun von g nach H eine gerade Linie gezogen, (nach XXI. c.)

Bew.folge 16) aus Bew.folge 14.

so müßte diese sowohl diesseits HC und HE, (nach 38. Zus. 2.)

17) aus Bew.folge 15.

als diesseits ga und gf liegen, (nach 38. Zus. 2.)

18) aus Bew.folge 16 und 17.

mithin $gHC < EHC$ und $Hga < fga$, (nach 40. Erkl.)

19) aus Bew.folge 18.

also $gHC + Hga < EHC + fga$, (nach 56. Lehrs.)

20) aus Nachbild. 3. und Bew.folge 19.

und nun $gHC + Hga < EHC + FGA$ seyn. (nach 48. Lehrs.)

Schluß aus Bew.folge 13 und 20.

Bei der (in Bew.folge 7.) gemachten Annahme gäbe es sonach immer wieder ein zweites System CHga, in welchem die Linien HC und ga jenseits C und a verlängert sich nicht schnitten, und dessen innere Winkel eine Summe $gHC + Hga$ bildeten, die noch kleiner als im ersten Systeme wäre; d. h. es ließen sich keine zwei geschnittenen Linien darstellen, die, ohne sich zu schneiden, mit der schneidenden Linie die kleinstmöglichste Summe der innern Winkel ausmachten. Da dieses nun sehr unwahrscheinlich ist, so ist sehr wahrscheinlich, daß sich die Linien HC

und GA jenseits C und A verlängert schneiden.

Anmerk. Dieser Lehrsatz ist der durch seine Unerweislichkeit berüchtigte 11te Grundsatz im Euklid. Die Schwäche seines Beweises aufzudecken, nicht zu verdecken, hatte man hier zur Absicht.

Zusatz 1. Ungleichlaufende Linien schneiden sich allemal auf einer Seite der schneidenden Linie. (siehe 66. Zus.)

Zusatz 2. Wenn zwei Linien weder auf der einen noch auf der andern Seite der schneidenden Linie sich je schneiden können, so sind sie an derselben gleichlaufend; wenn daher zwei Linien an irgend einer schneidenden Linie gleichlaufend sind, so kommen ihnen auch an jeder andern die (in 62. Zus. 2.) aufgezeichneten Merkmale zu. (siehe Zus. 1. und 69. Lehrs.)

Das Gleichlaufen zweier Linien ist also unabhängig von der schneidenden Linie; daher wird es bezeichnet, indem man zwischen jene beiden Linien das Zeichen || setzt. So drückt AB || CD aus, daß AB und CD gleichlaufend sind.

Zusatz 3. Wenn eine Linie die eine von zwei gleichlaufenden schneidet, so schneidet sie auch die andere. (siehe Zus. 1.)

Zusatz 4. Wenn eine Linie senkrecht auf der einen von zwei gleichlaufenden steht, so steht sie auch senkrecht auf der andern. (siehe Zus. 2 und 3.)

Zusatz 5. Durch einen Punkt ausserhalb einer geraden Linie ist mit dieser nur eine gleichlaufende möglich. (siehe Zus. 3.)

Zusatz 6. Wenn die Ebenen zweier + Winkel und ihre einen Schenkel auf einander und nach einer Seite hin

+ gleichen

ihre Spitzen aber nicht in einander liegen, so sind ihre beiden andern Schenkel gleichlaufend, und können sich daher nicht schneiden. (siehe 66. Erkl. und Zus. 2.)

Zusatz 7. Wenn die einen Schenkel zweier gleichen Winkel auf einander und nach einer Seite hin liegen, und ihre andern Schenkel einen Punkt gemeinschaftlich haben, so liegen auch ihre Spitzen in einander, und diese beiden andern Schenkel auf einander. (siehe Zus. 6.)

Zusatz 8. Durch einen Punkt ausserhalb einer geraden Linie ist auf diese nur eine einzige senkrechte möglich. (siehe Zus. 7. und 56. Zus. 3.)

73. Lehrsatz.

Wenn zwei Linien gleichlaufend mit einer dritten sind, so sind sie es auch unter einander.

Grundsystem: Bild 21.

Gründe:	Folge:
1) AB ‖ EF	AB ‖ CD.
2) CD ‖ EF	

Vorbereit. Bedient man sich hier des (in 72. Zus. 2.) aufgestellten allgemeinsten Beweismittels, so fordert dieses eine Vermehrung des Systems; nämlich als Folgerungsmittel zu Grund 1. eine schneidende Linie durch AB und EF, als Folgerungsmittel zu Grund 2. eine schneidende Linie durch CD und EF, und als Begründungsmittel für die Folge eine schneidende Linie durch AB und CD. Allen diesen Forderungen geschieht Genüge, wenn alle 3 Linien zugleich durch eine schneidende geschnitten werden, welches (nach 72. Zus. 3.) immer möglich ist. Es läßt sich aber der Beweis auch aus 72. Zus. 1. und 3. indirekt führen.

Beweis.

Vermehr. Wenn eine gerade Linie MN alle drei Linien AB, CD, EF zugleich in den Punkten G, H, I schnitte

Bew.folge 1) aus Grund 1.
so wäre AGM = EIM (nach 72. Zus. 2.)

2) aus Grund 2.
und CHM = EIM, (nach 72. Zus. 2.)

3) aus Bew.folge 1 und 2.
demnach AGM = CHM. (nach 47. Lehrs.)

Schluß. aus Bew.folge 3.
Folglich ist AB || CD. (nach 72. Zus. 2.)

Anmerk. Dieser Lehrsatz läßt sich auf vier und mehr Linien erweitern. Ueberhaupt wäre hier der Ort, von den Bedingungen, unter welchen Linienfiguren entstehen, im Allgemeinen zu sprechen; die Grenzen dieser Schrift aber gebieten, bei der Betrachtung dreier Linien abzubrechen.

74. Aufgabe.

Durch einen Punkt, der ausser einer geraden Linie liegt, mit dieser eine gleichlaufende zu ziehen.

Grundsystem: Bild 22.

Angabe:	Forderung:
Die Lage von C zu AB.	Die Linie CD || AB

Vorbereit. Als Auflösungsmittel dienen 72. Zus. 2 und 6. Beide fordern durch eine Vermehrung eine schneidende Linie durch C (weil nur dieser Punkt von CD bekannt ist) und irgend einen Punkt von AB, und als Auflösungsforderung an dieser schneidenden Linie eines

der in 62. Zus. 2. aufgestellten Merkmale. Alles dieß läßt sich nach schon bekannten Aufgaben leicht bewerkstelligen.

Auflösung.

Vermehr. aus Angabe.
Man ziehe durch C und irgend einen Punkt der Linie AB die Linie EF, (nach XXI. c)

Aufl.ford. aus Angabe und Vermehr.
hierauf CD so, daß entweder ECD = EFB oder FCD = AFE: (nach 57. Aufg.)

Schluß aus Aufl.ford.
so ist CD || AB. (nach 72. Zus. 2 oder 6.)

Anmerk. Diese Auflösung enthält das bekannte Verfahren, gleichlaufende Linien mittelst eines Dreiecks zu beschreiben, in sich.

75. Aufgabe.

Durch einen Punkt, der ausser einer geraden Linie liegt, gegen diese eine andere so zu ziehen, daß beide mit einander einen gegebenen Winkel bilden.

Grundsystem: Bild 23.

Angaben:	Forderung:
1) Die Lage von C zu AB	CD so, daß CDB = M.
2) Ein Winkel M.	

Vorbereit. Die schon oben gelösete Aufgabe, einen Winkel einem andern gleich zu machen, kann hier nicht unmittelbar gebraucht werden, weil dort die Lage des unbekannten Schenkels von jedem, ausser dem gegebenen oder durch die Stellung erhaltenen Schenkel liegenden, Punkte unabhängig blieb; daher müssen hier von neuem Sätze als Auflösungsmittel gesucht werden, nach

welchen die Gleichheit zweier Winkel sich erkennen läßt. Hierzu dienen insbesondere gleichlaufende Linien, weil bei diesen jede schneidende Linie gleiche Winkel hervorbringt (nach 72. Zus. 2). Auf diese Weise stößt man immer auf eine der zwei folgenden Auflösungen, je nachdem man sich die Linie AB als schneidende oder als geschnittene Linie vorstellt; zu welchem ähnliche Betrachtungen, wie bei vorhergehender Aufgabe, führen.

Auflösung 1.

Vermehr. aus Angabe 1 und 2.
Man ziehe durch irgend einen Punkt in der Linie AB die Linie HI so, daß BHI = M, (nach 57. Aufg.)

Aufl.ford. aus Angabe 1. und Vermehr.
hierauf durch C mit HI gleichlaufend die CD: (nach 74. Aufg.)

Schluß aus Vermehr. und Aufl.ford.
so ist CDB = M. (nach 72. Zus. 2. und 47. Lehrs.)

Auflösung 2.

Vermehr. aus Angabe 1.
Man ziehe durch C gleichlaufend mit AB die CE, (nach 74. Aufg.)

Aufl.ford. aus Angabe 2. und Vermehr.
hierauf CD so, daß ECD = M: (nach 57. Aufg.)

Schluß. aus Vermehr. und Aufl.ford.
so ist CDB = M. (nach 72. Zus. 2. und 47. Lehrs.)

Zugabe. Durch einen Punkt, der ausser einer geraden Linie liegt, auf diese eine senkrechte zu ziehen. (siehe 58. Zugabe 2.)

Zweiter Abschnitt.

Von völlig begrenzten Ebenen, wobei blos Linien und Winkel zur Sprache kommen.

Erste Abtheilung.

Elementarsätze.

---

§. 6.

Von der Gleichheit und Ungleichheit der Linien und Winkel in einem Dreiecke.

76. Erklärung.

Dasjenige Flächensystem ABCA (Bild 24.), welches durch drei gerade Linien gebildet wird, von denen je zwei immer in einem gemeinschaftlichen Endpunkte zusammenhängen, heißt Dreieck. Die gedachten Linien AB, BC, AC werden Seiten, die Punkte A, B, C, in welchen die Seiten zusammenhängen, Ecken, und die Winkel ABC, ACB, BAC, welche je zwei Seiten mit einander bilden, Winkel des Dreiecks genannt.

Zusatz 1. Je zwei Seiten eines Dreiecks bilden an der dritten einwärtslaufende Linien; daher ist die Summe je zweier Winkel eines Dreiecks immer kleiner als ein flacher. (siehe 71. Zus. und 66. Erkl.)

Zusatz 2. Zwei Winkel eines Dreiecks müssen immer spitze seyn; daher kann in einem Dreiecke nur ein rechter, nur ein stumpfer Winkel seyn. (indirekt aus vorigem Zusatze.)

77. Erklärung.

Ein Dreieck heißt gleichseitig, wenn alle drei Seiten; gleichschenklig, wenn nur zwei Seiten einander gleich sind; ungleichseitig, wenn keine Seite der andern gleich ist.

Ein Dreieck wird spitzwinklig genannt, wenn alle seine Winkel spitze sind; rechtwinklig, wenn es einen rechten; stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel hat. Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, welche den rechten Winkel bilden, heissen Katheden, und die, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, wird Hypotenuse genannt.

78. Erklärung.

Der Nebenwinkel CBE (Bild 25.), welcher entstehet, wenn die Seite eines Dreiecks verlängert wird, heißt des Dreiecks äusserer Winkel; im Gegensatze heissen die Winkel des Dreiecks selbst innere, und zwar derjenige, welcher neben dem äussern liegt, der anliegende, die beiden andern aber die gegenüberliegenden.

Zusatz 1. Der äussere Winkel ist allemal größer als einer der gegenüberliegenden. (aus 76. Zus. 1. nach 66. Erkl.)

Zusatz 2. Wenn (Bild 26.) von einem Punkte D, der diesseits A und C in AC liegt, nach der gegenüberliegenden Ecke B eine Linie BD gezogen wird, so ist allemal ADB > ACB. (siehe Zus. 1.)

Zusatz 3. Wenn (Bild 26.) von einem Punkte E, der diesseits der Grenzen eines Dreiecks liegt, nach zwei Ecken desselben A und B Linien AE und BE gezogen werden, so ist allemal AEB > ACB; denn verlängert man BE bis D, so ist sowohl AEB > ADB als ADB >

ACB (nach Zus. 2.), also AEB > ACB (nach 50. Lehrs.)

Zusatz 4. Jeder äussere Winkel bildet mit seinem anliegenden innern einen flachen; wenn daher ein äusserer Winkel mit einem seiner gegenüberliegenden eine Summe bildet, die größer, gleich oder kleiner als ein flacher ist, so ist in dem beziehlichen Falle sein anliegender kleiner, gleich oder größer als der erwähnte gegenüberliegende. (nach 52. Lehrs. und 54. Lehrs.)

Zusatz 5. Ein äusserer Winkel bildet mit einem seiner gegenüberliegenden innern eine Summe, die grösser, gleich oder kleiner als ein flacher ist, je nachdem der genannte gegenüberliegende größer, gleich oder kleiner als der anliegende ist. (rein indirekt aus vorigem Zusatze.)

79. Erklärung.

Eine Linie, welche aus der Ecke eines Dreiecks senkrecht auf die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung gezogen wird, heißt Höhe des Dreiecks, und in Bezug auf diese Höhe wird die gedachte Seite Grundlinie des Dreiecks genannt.

Zusatz. Wenn die beiden an der Grundlinie eines Dreiecks liegenden Winkel spitz sind, so fällt die Höhe in die Grundlinie diesseits ihrer Endpunkte; ist aber einer von jenen Winkeln ein rechter, so fällt sie in die Spitze dieses rechten Winkels, und daher mit einer Seite des Dreiecks zusammen; ist endlich einer von jenen Winkeln ein stumpfer, so fällt die Höhe jenseits der Spitze dieses stumpfen Winkels. (indirekt aus 78. Zus. 1.)

80. Lehrsatz.

Die Summe der drei innern Winkel eines Dreiecks ist einem flachen gleich.

Grundsystem: Bild 25.

Folge:

ABC + ACB + BAC = P.

Vorbereit. Nach 72. Zus. 2. läßt sich beurtheilen, daß die Summe zweier Winkel einem flachen gleich ist; will man daher jenen Satz als Beweismittel gebrauchen, so müssen zuvor zwei Winkel des Dreiecks in eine Summe gebracht werden. Dieß veranlaßt eine Vermehrung des Systems, die dann einen zum Beweise dienenden Grund an die Hand giebt.

Ist man gesonnen, z. B. den Winkel ACB an ABC zu fügen, so kann dieß auf eine doppelte Weise geschehen; entweder wird BC oder AB der gemeinschaftliche Schenkel. Da aber nur im ersten Falle eine Beweisfolge aus dem durch die Vermehrung erhaltenen Grunde hergeleitet werden kann, welche dem Beweismittel günstig ist, so ist letzterer zu verwerfen. Uebrigens hat der Beweis keine Schwierigkeit, und kann auf mehrere Arten geführt werden.

Beweis.

Vermehr. Wenn die Linie BD so gezogen würde, daß CBD = ACB, (nach 57. Aufg.)

Bew.folge 1) aus Vermehr.
so wäre ABD = ABC + ACB, (nach 51. Lehrs.)

2) aus Vermehr.
ferner AC || BD und daher ABD + BAC = P. (nach 72. Zus. 2.)

Schluß aus Bew.folge 1 und 2.
Folglich ist ABC + ACB + BAC = P. (nach 51. Lehrs.)

Zusatz 1. Jeder äussere Winkel eines Dreiecks ist der Summe seiner beiden gegenüberliegenden gleich (siehe 78. Zus. 4.)

Zusatz 2. Die Summe der drei äussern Winkel eines Dreiecks, deren zugehörige anliegende beziehlich die drei innern sind, beträgt zwei flache Winkel. (aus Zus. 1.)

Zusatz 3. In einem rechtwinkligen Dreiecke beträgt die Summe der beiden spitzen Winkel einen rechten (siehe Zus. 1.); daher ist jeder solche spitze Winkel der Unterschied aus einem rechten und dem andern spitzen Winkel (nach 52. Zus. 5.)

Zusatz 4. Jeder Winkel eines Dreiecks ist gleich dem Unterschiede aus einem flachen und der Summe der beiden andern Winkel des Dreiecks. (nach 52. Zus. 5.)

81. Zur Auffindung der allgemeinen Verbindungsarten, welche an dreieckigen Systemen vorausgesetzt werden dürfen, um in einem bestimmten Falle Beweisfolgen aus den Gründen ableiten, oder Beweisgründe für die Folgen eines Lehrsatzes aufstellen zu können, dienen die oben in 4. 5. 10. und 46. für die Verbindung der Linien und Winkelsysteme gegebenen Vorschriften. So wie dort, so werden auch hier zuerst die jedem Grunde und jeder Folge angemessenen besondern Verbindungen aufgesucht, und solche, die allen Beweismitteln irgend eines Grundes oder Folge entgegen sind, ausgeschieden, die noch übrigen aber zu allgemeinen erhoben. Allein hier tritt, wenn die besondere Verbindung, welche zur allgemeinen erhoben wird, blos die gegenseitige Lage zweier Linien berücksichtigt, noch der eigene Umstand ein, daß dann die gegenseitige Lage der Dreiecksebenen hinsichtlich ihrer Richtungen unbestimmt bleibt; in einem solchen Falle ist es daher allemal erforderlich, diese Bestimmung

noch zu den andern hinzuzufügen. Ob dabei die Ebenen der Dreiecke auf einander oder neben einander liegend anzunehmen seyen, dieß muß aus der Beschaffenheit der Beweismittel entschieden werden.

82. Lehrsatz.

In einem Dreiecke stehen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

Grundsystem: Bild 24.

Grund:	Folge:
AC = BC.	BAC = ABC

Vorbereit. Als Beweismittel müssen hier die oben (in 1. und 40.) aufgestellten Erklärungen gebraucht werden, welche zu ihrer Anwendbarkeit eine Verbindung der in dem Grunde und in der Folge enthaltenen Linien und Winkel fordern; deßwegen muß (nach 67.) eine Nachbildung vorgenommen werden.

Durch die Nachbildung wird der Grund des Lehrsatzes in zwei andere verwandelt, welche in Bew.folge 1 und 2. stehen. Sucht man für diese die besondern Verbindungen auf, und erhebt sie zu allgemeinen, wobei zu den besondern noch die Bestimmung, daß die Dreiecksebenen auf einander liegen sollen, hinzugefügt werden muß, weil dafür manches, nichts aber für das Nebeneinander spricht, so ergeben sich, nach Weglassung der unnützen, folgende:

Entweder: die Punkte C, c oder A, b in einander und dabei sowohl die Linien AC, bc als die Ebenen ABCA, abca auf einander;

Oder: die Punkte C, c oder B, a in einander und dabei sowohl die Linien BC, ac als die Ebenen ABCA, abca auf einander.

Nachdem eine von diesen allgemeinen Verbindungsarten aufgestellt worden ist, hält es nicht mehr schwer, den Beweis synthetisch zu führen.

Beweis.

Nachbild. Man stelle sich noch ein Dreieck abca (Bild 24.) vor, welches identisch mit dem schon aufgestellten ist, und dessen Punkte a, b, c den Punkten A, B, C beziehlich entsprechen, worin also 1) AC = ac, 2) BC = bc, 3) AB = ab, 4) ACB = acb, 5) ABC = abc und 6) BAC = bac ist, (nach 67.)

Bew.folge 1) aus Grund und Nachbild. 1.
so ist ac = BC (nach 6. Lehrs.)
2) aus Grund und Nachbild. 2.
und AC = bc. (nach 6. Lehrs.)

Verbind. Wenn nun 1) die Punkte A, b in einander und sowohl 2) die Linien AC, bc als 3) die Ebenen ABCA, abca auf einander lägen, (siehe Bild 27.)

Bew.folge 3) aus Bew.folge 2. und Verbind. 1 und 2.
so müßte C in c (nach 1. Erkl.)
4) aus Nachbild. 4. Verbind. 2 und 3. und Bew.folge 3.
und BC auf ac, (nach 40. Erkl.)
5) aus Bew.folge 1. 3 und 4.
mithin B in a liegen; (nach 1 Erkl.)
6) aus Verbind. 1. und Bew.folge 3 und 5.
demnach ABC = bac seyn. (nach 40. Zus. 3.)

Schluß. aus Nachbild. 6. und Bew.folge 6.
Folglich ist ABC=BAC. (nach 47. Lehrs.)

Zusatz 1. In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die zwei den gleichen Seiten gegenüberliegenden, und in einem gleichseitigen alle drei Winkel einander gleich; jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks ist daher der dritte Theil eines flachen.

Zusatz 2. Im gleichschenkligen Dreiecke sind immer die gleichen, und im gleichseitigen alle Winkel spitze. (siehe Zus. 1. und 76. Zus. 1.)

Zusatz 3. Die Sehne BD (Bild 28.) bildet mit jedem der Radien CB und CD einen spitzen Winkel; die Sekante AB (Bild 29.), deren einer Endpunkt A diesseits der Kreislinie liegt, bildet mit dem Radius CB einen spitzen Winkel; die Sekante AB (Bild 28.), deren einer Endpunkt A jenseits der Kreislinie liegt, und die durch den Kreis geht, bildet mit dem Radius CB einen spitzen Winkel; endlich bildet die Sekante AD (Bild 28.), deren einer Endpunkt A jenseits der Kreislinie liegt, und die nur bis an die Kreislinie geht, mit dem Radius CD einen stumpfen Winkel. (siehe Zus. 2.)

Zusatz 4. Wenn die Katheden eines rechtwinkligen Dreiecks einander gleich sind, so ist jeder spitze Winkel desselben die Hälfte eines rechten. (siehe 80. Zus. 3.)

Zusatz 5. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist derjenige äussere Winkel, dessen gegenüberliegende innere die einander gleichen Winkel sind, doppelt so groß als einer von diesen. (siehe 80. Zus. 1.)

Zusatz 6. Wenn (Bild 30.) die Spitze C eines Zentriwinkels ACB in einem Schenkel des zu demselben

Bogen gehörigen *) Peripheriewinkels ADB liegt, so ist ACB = 2 ADB. (nach Zus. 5.)

Zusatz 7. Auch wenn (Bild 31.) die Spitze C des Zentriwinkels ACB diesseits der Schenkel des zu demselben Bogen gehörigen Peripheriewinkels ADB liegt, ist ACB = 2 ADB; denn stellt man sich durch beider Spitzen C und D die Linie DE gezogen vor, so ist ACE = 2 ADE und BCE = 2 BDE (nach Zus. 6.) daher ACB = 2 BDE + 2 BDE (nach 51. Lehrs.), folglich ACB = 2 ADB. (nach 42. Zus. 3.).

Zusatz 8. Endlich wenn (Bild 32.) die Spitze C des Zentriwinkels ACB jenseits der Schenkel des zu demselben Bogen gehörigen Peripheriewinkels ADB liegt, ist ACB = 2 ADB; denn stellt man sich durch beider Spitzen C und D die Linie DE gezogen vor, so ist ACE = 2 ADE und BCE = 2 BDE (nach Zus. 6.), daher ACB = 2 ADE — 2 BDE (nach 52. Lehrs.), folglich ACB = 2 ADB (nach 42. Zus. 4.).

Zusatz 9. Jeder Peripheriewinkel ist daher die Hälfte des zu demselben Bogen gehörigen Zentriwinkels, wie auch übrigens die Lage beider zu einander seyn mag (siehe Zus. 6. 7 und 8.); demnach ist ein Peripheriewinkel spitz, recht oder stumpf, je nachdem der zu demselben Bogen gehörige Zentriwinkel hohl, flach oder erhaben ist (siehe 56. Zus. 3.)

Zusatz 10. Peripheriewinkel sind einander gleich, wenn die zu demselben Bogen gehörigen Zentriwinkel ein-

*) Unter dem zu einem Bogen gehörigen Winkel versteht man jeden in der Ebene des Kreises liegenden Winkel, dessen Schenkel durch die Endpunkte des gedachten Bogens gehen, und dessen Spitze auf seiner konkaven Seite liegt.

ander gleich sind; daher sind alle zu demselben Bogen gehörige Peripheriewinkel unter einander gleich. (siehe Zus. 9.)

Zusatz 11. Ein Winkel ist größer oder kleiner als der zu demselben Bogen gehörige Peripheriewinkel, je nachdem sein Scheitel diesseits oder jenseits der Kreislinie liegt; dieß erhellet (nach 78. Zus. 1.) sogleich von demjenigen Peripheriewinkel, dessen einer Schenkel in einem Schenkel des fraglichen Winkels liegt, und gilt daher auch von jedem andern (aus Zus. 10. nach 48. Lehrs. oder 49. Lehrs.)

Zusatz 12. Die Spitze eines Winkels liegt in der Kreislinie, wenn der demselben Bogen zugehörige Peripheriewinkel jenem gleich ist; sie liegt diesseits der Kreislinie, wenn jener Winkel größer, jenseits wenn er kleiner ist. (rein indirekt aus Zus. 10 und 11.)

83. Lehrsatz.

In einem Dreiecke liegt der größern Seite der größere Winkel gegenüber.

Grundsystem: Bild 24.

Grund:	Folge:
AC > BC.	ABC > BAC.

Vorbereit. Behandelt man diesen Lehrsatz ganz so wie den vorigen, so erhält man nachstehenden Beweis, der indirekt geführt werden muß, wenn eine solche allgemeine Verbindung gewählt wird, wobei die Punkte A, b oder B, a in einander liegen. Man kann aber vorigen Lehrsatz selbst als Beweismittel wählen, in welchem Falle eine Vermehrung des Systems nothwendig wird, die zum Zwecke führt.

Beweis.

Nachbild. Man stelle sich noch ein Dreieck abca (Bild 24.) vor, welches identisch mit dem schon aufgestellten ist, und dessen Punkte a, b, c den Punkten A, B, C beziehlich entsprechen, worin also 1) AC = ac, 2) BC = bc, 3) AB = ab, 4) ACB = acb, 5) ABC = abc und 6) BAC = bac ist, (nach 67.)

Bew.folge 1) aus Grund und Nachbild. 1.
so ist ac > BC (nach 7. Lehrs.)
2) aus Grund und Nachbild. 2.
und AC > bc. (nach 8. Lehrs.)

Verbind. Wenn nun 1) die Punkte C, c in einander, und sowohl 2) die Linien AC, bc als 3) die Ebenen ABCA, abca auf einander lägen, (siehe Bild 33.)

Bew.folge 3) aus Bew. 2. und Verbind. 1 und 2.
so müßte A jenseits b (nach 1. Erkl.)
4) aus Nachbild. 4. und Verbind.
und ac auf BC, (nach 40. Erkl.)
5) aus Bew.folge 1 und 4. und Verbind. 1.
mithin a jenseits B liegen; (nach 1. Erkl.)
6) aus Bew.folge 3 und 5.
demnach müßten sich AB und ab in einem Punkte m schneiden (nach 38. Zus. 3.).
7) aus Verbindung 1. und Bew.folge 3 und 6.
und also abc > BAC seyn. (nach 78. Zus. 1.)

Schluß. aus Nachbild. 5. und Bew. folge 7.
Folglich ist ABC > BAC. (nach 48. Lehrs.)

Zusatz 1. In einem ungleichseitigen Dreiecke ist kein Winkel dem andern gleich.

Zusatz 2. Jeder Winkel eines Dreiecks, der nicht der größten Seite gegenüber liegt, ist ein spitzer. (siehe 76. Zus. 2.)

Zusatz 3. Wenn von einem Punkte A (Bild 28.), der jenseits der Kreislinie liegt, irgend eine Sekante AB oder AD gezogen wird, so bildet diese mit der Linie AC, die durch den Mittelpunkt C geht, einen spitzen Winkel; weil immer AC größer als CB oder CD ist. (siehe Zus. 2.)

84. Lehrsatz.

In einem Dreiecke stehen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Vorbereit. Dieser Lehrsatz läßt sich wie der in 82. gelieferte, und überdieß aus beiden vorhergehenden rein indirekt beweisen.

Zusatz. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich sind, so ist es ein gleichschenkliges; und sind alle drei Winkel einander gleich, so ist es ein gleichseitiges.

85. Lehrsatz.

In einem Dreiecke steht dem größern Winkel die größere Seite gegenüber.

Vorbereit. Auch dieser Lehrsatz folgt rein indirekt aus 82. Lehrs. und 83. Lehrs.

Zusatz 1. Wenn in einem Dreiecke kein Winkel dem andern gleich ist, so ist es ein ungleichseitiges.

Zusatz 2. In einem rechtwinkligen Dreiecke steht dem rechten Winkel und in einem stumpfwinkligen dem stumpfen die größte Seite gegenüber. (siehe 76. Zus. 2.)

Zusatz 3. Unter allen Linien, die von einem Punkte nach einer geraden Linie gezogen werden können, ist die senkrechte die kleinste; und umgekehrt steht die kleinste immer senkrecht. (siehe Zus. 2.)

Zusatz 4. Wenn in einem Dreiecke ABCA (Bild 34.) die Seite AC gleich oder größer als BC ist, so ist jede Linie CD, von der Ecke C nach der gegenüber liegenden Seite diesseits AC und BC gezogen, kleiner als AC; denn es ist ABC gleich oder größer als BAC (nach 82. Lehrs. oder 83. Lehrs.), und jedesmal ADC > ABC (nach 78. Zus. 1.), also allemal ADC > BAC (nach 49. Lehrs. oder 50. Lehrs.), folglich AC > CD.

Zusatz 5. Wenn in einem Dreiecke ABCA (Bild 35.) die Seite AC gleich oder größer als BC ist, so ist jede Linie CD, von der Ecke C nach der Verlängerung der gegenüber liegenden Seite jenseits AC gezogen, grösser als AC; denn es ist ABC gleich oder größer als BAC (nach 82. Lehrs. oder 83. Lehrs.), also jedesmal BAC spitz (nach 82. Zus. 2. oder 83. Zus. 2.), demnach CAD stumpf und folglich CD > AC. (nach Zus. 2.)

Zusatz 6. Von einem Punkte können nach einer geraden Linie nicht mehr als zwei einander gleiche Linien gezogen werden, wie aus beiden vorstehenden Zusätzen erhellet; daher kann eine gerade Linie eine Kreislinie nicht in mehr als zwei Punkten schneiden.

Zusatz 7. Eine Tangente kann mit der Kreislinie nicht mehr als einen Punkt gemein haben; denn wollte

man annehmen, daß die Tangente zwei von einander geschiedene Punkte mit der Kreislinie gemein hätte, so liessen sich vom Mittelpunkte nach diesen Punkten zwei Radien ziehen, und zwischen denselben nach der Tangente Linien vom Mittelpunkte aus, die kleiner als der Radius wären (nach Zus. 4); demnach lägen, dem Begriffe der Tangente zuwider, alle zwischen jenen beiden befindlichen Punkte der Tangente diesseits der Kreislinie.

Zusatz 8. Eine Linie AB (Bild 36.), welche senkrecht auf dem Radius AC steht, ist eine Tangente der Kreislinie; denn jeder andere Punkt dieser Linie ist weiter vom Mittelpunkte entfernt *) als A, und liegt daher jenseits der Kreislinie (nach Zus. 3.). Umgekehrt steht der Radius, welcher nach dem Punkte, den die Tangente mit der Kreislinie gemein hat, gezogen wird, senkrecht auf der Tangente, da er die kleinste Linie ist, die vom Mittelpunkte nach der Tangente gezogen werden kann (nach Zus. 3.).

Zusatz 9. Wenn aus dem Berührungspunkte A einer Tangente AB (Bild 36.) irgend eine Sehne AD gezogen wird, so ist der Winkel BAD, den die Tangente mit der Sehne bildet, dem Peripheriewinkel gleich, welcher zu dem von gedachter Sehne abgeschnittenen und in die Ebene des Winkels BAD liegenden Bogen AD gehört. Begnügt man sich, diese Behauptung an demjenigen Peripheriewinkel AED, dessen einer Schenkel AE durch den Mittelpunkt C geht, nachzuweisen, welches (nach 82. Zus. 10.) erlaubt ist, so hat man, weil ACE ein flacher Winkel ist, ADE = Q (nach 82. Zus. 9.), also AED = Q − DAE (nach 80. Zus. 3.), ferner, da

*) Unter der Entfernung eines Punktes von einem andern, versteht man die zwischen beiden liegende gerade Linie.

AE senkrecht auf AB steht (nach Zus. 8.), BAD = Q — DAE, also AED = BAD (nach 47. Lehrs.).

86. Lehrsatz.

In einem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten immer größer als die dritte Seite.

Grundsystem: Bild 37.

Folge:

$AC + BC > AB.$

Vorbereit. Da hier zwei Seiten des Dreiecks in einer Summe vereinigt mit der dritten verglichen werden, so wird man zu einer Vermehrung des Systems bewogen, welche hierauf einen zum Beweise dienlichen Grund an die Hand giebt.

Es kann aber BC an AC auf eine doppelte Weise gefügt werden, entweder an den Punkt A oder C. Letztere Art ist aber allein brauchbar, weil aus ihr (nach 82. Lehrs.) die Beschaffenheit des vermehrten Systems sich näher erkennen läßt. Um aber das erwähnte Beweismittel in Thätigkeit setzen zu können, wird man gezwungen, noch überdieß eine Linie von C nach D zu ziehen.

Noch andere Beweise ergeben sich, wenn man die (in 15. und 19.) angeführten Lehrsätze als Begründungsmittel in Anwendung zu bringen sucht.

Beweis.

Vermehr. Würde AC jenseits C verlängert, CD = BC gemacht und von B nach D eine gerade Linie gezogen, (nach XXI. c. und e. und nach 23. Aufg.)

Bew.folge 1) aus Vermehr.
so wäre CBD = CDB, (nach 82. Lehrs.)

2) aus Vermehr.
ferner läge BD jenseits AB und BC, (nach 38. Zus. 2.)

3) aus Bew.folge 2.
also wäre ABD > CBD, (nach 40 Erkl.)

4) aus Bew.folge 1 und 3.
demnach auch ABD > CDB, (nach 49. Lehrs.)

5) aus Vermehr. und Bew.folge 4.
und folglich AD > AB. (nach 85. Lehrs.)

Bew.folge 6) aus Vermehr.
Nun ist aber AD = AC + BC, (nach 11. Lehrs.)

Schluß. aus Bew.folge 5 und 6.
also auch AC + BC > AB. (nach 7. Lehrs.)

Zusatz 1. In einem Dreiecke ist der Unterschied zweier Seiten immer kleiner als die dritte Seite. (siehe 14. Zus. 5.)

Zusatz 2. Wenn (Bild 26.) D in AC diesseits A und C liegt, so ist DB + AD < BC + AC; denn es ist BD < DC + BC (nach 86. Lehrs.), also AD + BD kleiner als AD + DC + BC (nach 15. Lehrs.), d. h. AD + BD < AC + BC.

Zusatz 3. Wenn (Bild 26.) E diesseits des Dreiecks ABCA liegt, so ist AE + BE < AC + BC; denn verlängerte man BE nach D, so wäre AD + BD > AE + BE

und $AC + BC > AD + BD$ (nach Zus. 2.), also ist $AC + BC > AE + BE$ (nach 9. Lehrs.)

Zusatz 4. Wenn von einem Punkte A, der in der Kreislinie (Bild 38.), oder jenseits (Bild 39.), oder diesseits derselben (Bild 40.) liegt, durch den Mittelpunkt C bis an den jenseits desselben liegenden Punkt der Kreislinie eine Linie AB gezogen wird, so ist diese größer als jede von A nach irgend einem andern Punkte der Kreislinie gezogene AE; denn zöge man den Radius CE, so wäre $AC + CE > AE$ (nach 86. Lehrs.), nun ist aber $AC + CE = AB$ (nach 11. Lehrs.), also auch $AB > AE$ (nach 7. Lehrs.)

Zusatz 5. Wenn von einem Punkte A, der jenseits der Kreislinie (Bild 39.) oder diesseits derselben (Bild 40.) liegt, bis an die Kreislinie eine Linie AD gezogen wird, in deren Verlängerung der Mittelpunkt C liegt, so ist diese kleiner als jede von A aus nach irgend einem andern Punkte der Kreislinie gezogene AE; denn zöge man den Radius CE, so wäre im ersten Falle $AC - CE < AE$ im andern $CE - AC < AE$ (nach Zus. 1.), nun ist aber dort $AC - CE = AD$ und hier $CE - AC = AD$ (nach 14. Lehrs.), also in beiden Fällen $AD < AE$ (nach 8. Lehrs.).

§. 7.

Von der Gleichheit der Linien und Winkel in verschiedenen Dreiecken.

87. Lehrsatz.

Grundsystem: Bild 24.

Gründe:	Folge:
1) AB = ab.	1) AC = ac.
2) BAC = bac.	2) BC = bc.
3) ABC = abc.	3) ACB = acb.

Vorbereit. Die in 1. und 40. aufgestellten Beweismittel müssen auch hier gebraucht werden. Dadurch wird man zu allgemeinen Verbindungen beider Systeme geleitet, nach deren Auffindung es, mit Zuziehung des in XVII. d. angeführten Beweismittels, nicht mehr schwer hielt, den Beweis auf gewohnte Art zu führen.

Zusatz 1. Wenn (Bild 41.) ein Winkel ACB in CD halbirt ist, und aus irgend einem Punkte D in der Halbirungslinie nach beiden Schenkeln Linien DA, DB so gezogen werden, daß CDA = CDB, so ist auch AC = BC, AD = BD und DAC = DBC. Dieser Zusatz bleibt wahr, der Winkel ACB mag hohl, flach oder erhaben seyn.

Zusatz 2. Gleichlaufende Linien AC, BD (Bild 42.) zwischen gleichlaufenden AB und CD sind einander gleich; denn zieht man BC, so entstehen zwei Dreiecke ABCA, BCDB, denen (nach 72. Zus. 2.) die im Lehrsatze angegebenen Merkmale zukommen.

*) Der Kürze halber wird keiner der folgenden Lehrsätze mehr wörtlich, sondern nur durch Zeichen ausgedrückt.

Zusatz 3. Alle Punkte einer Linie sind von ihrer gleichlaufenden gleich weit entfernt. (aus 72. Zus. 4. nach Zus. 2.)

88. Lehrsatz.

Grundsystem: Bild 24.

Gründe:	Folgen:
1) AB = ab	1) AC = ac
2) BAC = bac	2) BC = bc
3) ACB = ach	3) ABC = abc.

Vorbereit. Dieser Lehrsatz läßt sich nach Art des vorhergehenden beweisen; er kann aber auch auf ihn zurückgeführt werden, wenn man aus den zwei letzten Gründen (nach 80. Zus. 4.) die erste Folge ableitet.

Zusatz 1. Wenn (Bild 41.) ein Winkel ACB in CD halbirt ist, und aus irgend einem Punkte D in der Halbirungslinie nach den Schenkeln Linien DA, DB so gezogen werden, daß DAC = DBC, so ist AD = BD, AC = BC und ADC = BDC. Dieser Zusatz bleibt wahr, der Winkel ACB mag hohl, flach oder erhaben seyn.

Zusatz 2. Wenn zwischen gleichlaufenden Linien AB, CD (Bild 42.) zwei andere AC und BD so gezogen sind, daß BAC = BDC, so sind auch diese gleichlaufend; denn zieht man BC, so entstehen zwei Dreiecke ABCA und BDCB, in denen BC = BC, BAC = BDC und ABC = BCD (nach 72. Zus. 2, weil AB || CD.) also ist auch ACB = CBD und folglich AC || BD (nach 72. Zus. 2.).

89. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folgen:
1) AB = ab	1) BC = bc
2) AC = ac	2) ACB = acb
3) BAC = bac	3) ABC = abc

Vorbereit. Behandelt man den Beweis dieses Lehrsatzes wie den in 87. aufgestellten, so wird man zu ähnlichen allgemeinen Verbindungen geleitet, welche zu Beweisen, die den dortigen gleichen, führen.

Zusatz 1. Wenn (Bild 41.) ein Winkel ACB in CD halbirt ist, und aus irgend einem Punkte D in der Halbirungslinie nach den Schenkeln Linien DA, DB so gezogen werden, daß AC = BC, so ist auch AD = BD, CAD = CBD und ADC = BDC. Dieser Zusatz bleibt wahr, der Winkel ACB mag hohl, flach oder erhaben seyn.

Zusatz 2. Wenn (Bild 42.) AB und CD sowohl gleich als gleichlaufend sind, so sind auch AC und BD gleich und gleichlaufend; denn zieht man BC, so ist in den Dreiecken ABCA, BCDB sowohl BC = BC als AB = CD und ABC = BCD (nach 72. Zus. 2. weil AB||CD); also ist auch ACB = CBD und folglich AC||BD (nach 72. Zus. 2.)

Zusatz 3. Zu gleichen Zentriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Sehnen.

90. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folgen:
1) AB = ab.	1) BC = bc
2) AC = ac.	2) ABC = abc
3) ACB = acb.	3) BAC = bac.
4) { entweder ABC + abc > P. { oder ABC + abc < P.	

Vorbereit. Wenn man den Beweis dieses Lehrsatzes synthetisch zu führen unternimmt, so wird man in jedem Falle zu einer Verbindung der Systeme getrieben, die aber durchaus verschieden ausfällt, je nachdem dabei die einen oder die andern Beweismittel berücksichtiget werden. So lassen sich aus den beiden ersten Gründen (nach 1. Erkl.) Beweisfolgen herleiten, wenn die einen Endpunkte der verglichenen Linien in einander und sie selbst auf einander liegen; aber auch (nach 82. Lehrs.), wenn ihre einen Endpunkte in einander und sie selbst ausser einander liegen, wobei jedoch mittelst einer Vermehrung die beiden andern Endpunkte durch eine gerade Linie verbunden werden müssen. Eben so läßt sich aus dem vierten Grunde (nach 38. Erkl.) eine Beweisfolge herholen, wenn die einen Schenkel der darin betrachteten Winkel in einander und ihre Ebenen neben einander liegen; aber auch (nach 72. Lehrs.), wenn ihre Schenkel gegen einander und ihre Ebenen auf einander liegen.

Diesen Betrachtungen gemäß ergeben sich mit Berücksichtigung des dritten Grundes folgende 3 von einander gänzlich verschiedene Verbindungsarten, wovon jede zu einem ihr eigenthümlichen Beweise führt.

I. Die Punkte A, a oder C, c in einander und dabei jedesmal die Linien AC, ac so wie die Ebenen ABCA, abca auf einander.

II. Die Punkte A, a oder B, b in einander, die Linien AB, ab auf einander und die Ebenen ABCA, abca neben einander.

III. Die Punkte A, b oder B, a in einander und dabei sowohl die Linien AB, ab als die Ebenen ABCA, abca auf einander.

Bedient man sich der ersten Verbindungsart, so erhält man nachstehenden ersten Beweis. Dabei ergeben

sich ohne Schwierigkeit die zwei ersten Beweisfolgen; hierauf kommt aber der Beweis ins Stocken, weil, um aus Grund 1. eine Beweisfolge herleiten zu können, zuvor die gegenseitige Lage der Linien AB, ab erkannt seyn müßte, was sich auf keine Weise erzielen läßt. Ueberlegt man aber, daß wenn anders die dritte Folge wahr seyn soll, die Linien AB, ab auf einander liegen müssen, so wird man dadurch bewogen, sie indirekt darzuthun, welches auch leicht von Statten geht.

Wählt man aber die zweite Verbindungsart, so gelangt man zu nachstehendem zweiten Beweis. Auch hier erhält man ohne Mühe die zwei ersten Beweisfolgen; um aber (nach 82. Lehrs.) aus Grund 2. eine Beweisfolge ziehen zu können, wird eine Vermehrung des Systems gefordert, und da dabei die äussere Beziehung der Hülfslinie mit dem verbundenen Systeme auf verschiedene Weise gedacht werden kann, so ist der Beweis an eben so vielen Grundsystemen wiederholt zu betrachten (nach 70. c.). Sollte man auch jetzt noch auf Schwierigkeiten stoßen, so werden diese durch die analytische Behandlung des Beweises nothwendig gehoben.

Gebraucht man endlich die dritte Verbindungsart, so bildet sich der dritte Beweis. Dabei erhält man sogleich die zwei ersten Beweisfolgen. Da aber die äußere Beziehung mehrerer Linien zu einander in dem verbundenen Systeme sich nicht gänzlich bestimmen läßt, so muß (nach 10. am Ende.) der Beweis an so vielen Grundsystemen besonders betrachtet werden, als sich verschiedene Zusammenstellungen jener Linien denken lassen. Von hier an ist es nicht mehr leicht thunlich, aus den Gründen oder Beweisfolgen, einzeln genommen, neue Beweisfolgen herzuleiten; erwägt man aber, daß auch die drei vorhergehenden Lehrsätze als Beweismittel dienen können, so

wird man dadurch in den Stand gesetzt, den Beweis ans Ende zu treiben, wobei höchstens auf dem analytischen Wege die dienlichen Beweisgründe zu erforschen sind.

I. Beweis.

Verbind. Wenn 1) die Punkte A, a in einander, und sowohl 2) die Linien AC, ac als 3) die Ebenen ABCA, abca auf einander lägen, (Bild 43.)

Bew.folge 1) aus Grund 2. und Verbind. 1 und 2.
so müßte C in c (nach 1. Erkl.)

2) aus Grund 3. Verbind. 2 und 3. und Bew.folge 1.
und BC auf bc liegen. (nach 40. Erkl.)

3) aus Folge 3.
Wollte man nun annehmen, daß BAC > bac, (nach XXXVI. c.)

4) aus Verbind. 1 und 2. und Bew.folge 3.
so müßte AB jenseits ab liegen (nach 40. Erkl.)

5) aus Grund 1. und Bew.folge 2 und 4.
und ABb = AbB, (nach 82. Lehrs.)

6) aus Bew.folge 2. 4 und 5.
demnach AbC + ABb = P (nach 78. Zus. 5.)

7) aus Verbind. 1. und Bew.folge 1 und 2.
d. h. abc + ABC = P seyn, welches mit Grund 4. im Widerspruche steht.

Schluß. aus Bew.folge 3 und 7.
Folglich kann nicht BAC > bac seyn (nach XXXVI. c.). Ganz so läßt

sich aber auch zeigen, daß nicht BAC < bac seyn könne; es muß daher BAC = bac seyn, und hierdurch ist obiger Lehrsatz auf jeden der frühern zurückgeführt.

Beweis. II.

Verbind. Wenn 1) die Punkte A, a in einander, 2) die Linien AB, ab auf einander und 3) die Ebenen ABCA, abca neben einander lägen,

Bew.folge 1) aus Grund 1. und Verbind. 1 und 2. so müßte B in b liegen (nach 1. Erkl.)

2) aus Grund 4. Verb. 2 und 3. und Bew.folge 1. und BC könnte mit bc nicht in einer geraden Linie liegen. (nach 38. Erkl.)

Vermehr. Würde nun von C nach c eine gerade Linie Cc gezogen, (nach XXI. c.)

Bew.folge 3) aus Bew.folge 2. so müßte diese entweder jenseits B (Bild 44.) oder diesseits B und zwar entweder zwischen A und B (Bild 45.), oder durch A (Bild 46.), oder jenseits A (Bild 47.) fallen;

4) aus Grund 2. und Verbind. 1 und 3. in jedem Falle *) aber wäre ACc = AcC, (nach 82. Lehrs.)

5) aus Grund 3. und Bew.folge 4.

*) Im Bild 46 kann man diese Beweisfolge übergehen und sogleich zur folgenden schreiten.

demnach BCc = BcC, (nach 51. Lehrs. oder 52. Lehrs.)

6) aus Bew.folge 5.
und nun BC = Bc. (nach 84. Lehrs.)

Schluß. aus Bew.folge 1 und 6.
Folglich ist BC = bc (nach 4. b.) und hierdurch ist obiger Lehrsatz auf den vorhergehenden zurückgeführt.

Beweis III.

Verbind. Wenn 1) die Punkte A, b in einander und sowohl 2) die Linien AB, ab als 3) die Ebenen ABCA, abca auf einander lägen,

Bew.folge 1) aus Grund 1. und Verbind. 1 und 2.
so müßten B, a in einander liegen (nach 1. Erkl.)

2) aus Grund 4. Verb. und Bew.folge 1.
und die Linien BC, bc sich allemal in einem Punkte m schneiden, es mag dieß entweder ohne irgend eine Vorkehrung geschehen, oder gedachte Linien mögen nach der einen oder nach der andern Seite verlängert werden müssen, (nach 72. Lehrs.)

3) aus Grund 3. Verb. 1 und 3. und Bew.folge 1 und 2.
dabei lassen sich verschiedene in (Bild 48. 49. 50. und 51.) aufgestell-

te Grundsysteme denken *), wovon das (in Bild 48.) ausgedrückte seiner Einfachheit wegen sogleich als erledigt betrachtet werden kann.

Bew.folge 4) aus Grund 2 und 3 und Bew.folge 3. In jedem der Grundsysteme (Bild 49. 50. und 51.) hat man zwei Dreiecke ACmA und acma, in welchen AC = ac, AmC = amc und ACm = acm' (dieß letztere Merkmal ergiebt sich in Bild 50. aus Grund 3. nach 52. Zus. 8.)

5) aus Bew.folge 4. also auch mC = mc und mA = ma, (nach 88. Lehrs.)

6) aus Bew.folge 5. demnach ist aC = Ac (nach 11. Lehrs. oder 14. Lehrs.)

Schluß. aus Verbind. 1. und Bew.folge 1 und 6. Folglich auch BC = bc, und hierdurch wird obiger Lehrsatz auf den vorhergehenden zurückgeführt.

Anmerk. Die Weglassung des vierten Grundes würde den Beweis unmöglich machen. Bei einiger Aufmerksamkeit wird man sich auch überzeugen können, daß unter der Voraussetzung ABC + abc = P zu jedem Dreiecke ABCA, in welchem nicht ABC = Q

*) Es kann kein Grundsystem entstehen, wobei eine der Ecken C, c in der Ebene des andern Dreiecks läge, weil ein solches Grundsystem (nach 78. Zus. 2 und 3.) dem Grund ACB = acb widerspräche.

ist, ein zweites abca angegeben werden kann, welches mit jenem die drei ersten Gründe des Lehrsatzes hergiebt, ohne daß auch nur eine Folge des Lehrsatzes in denselben Statt fände.

Es ist der Mühe werth, die besondern Bedingungen aufzusuchen, welche statt des vierten Grundes gesetzt werden können; dazu dienen folgende Betrachtungen:

I. Die Summe zweier in verschiedenen Dreiecken liegender Winkel ist kleiner als ein flacher,

a) wenn jeder dieser beiden Winkel spitz, oder der eine spitz und der andere stumpf ist, daher auch

b) wenn keinem dieser Winkel die größte Seite gegenüber liegt, weil dann (nach 83. Zus. 2.) jeder spitz ist;

c) wenn die Summe irgend zweier andern in denselben Dreiecken liegenden Winkel gleich oder größer als ein flacher ist, daher auch

d) wenn von irgend zwei solchen Winkeln gezeigt wird, daß entweder beide stumpf oder beide recht, oder der eine stumpf und der andere recht ist.

II. Die Summe zweier in verschiedenen Dreiecken liegender Winkel ist größer als ein flacher,

a) wenn beide stumpf, oder der eine stumpf und der andere recht ist;

b) wenn die Summe der vier andern in denselben Dreiecken liegenden Winkel kleiner als ein flacher ist.

Die merkwürdigsten besondern Einschränkungen, welche hiernach in obigem Lehrsatze statt des vierten Grundes gesetzt werden können, sind folgende:

1) daß AC gleich oder kleiner als AB sey, weil dann auch ac gleich oder kleiner als ab, und also (nach I. b.) $ABC + abc < P$ ist.

2) daß ACB recht oder stumpf sey, weil denn auch acb recht oder stumpf, und also (nach I. d.) ABC + abc < P ist.

Zusatz 1. Wenn (Bild 41.) von den Punkten A, B, die in den Schenkeln eines Winkels ACB gleich weit von der Spitze C entfernt sind, gerade Linien AD, BD, welche sich in einem Punkte D schneiden, so gezogen werden, daß DAC = DBC, so ist auch AD = BD, ADC = BDC und ACD = BCD. Dieser Zusatz bleibt wahr, der Winkel ACB mag hohl, flach oder erhaben seyn.

Zusatz 2. Wenn zwischen gleichlaufenden Linien AB und CD (Bild 42.) gleiche Linien AC und BD liegen, so sind auch diese gleichlaufend, wenn BAC und BDC Winkel einerlei Art sind, d. h. wenn beide spitz oder beide stumpf sind; denn zieht man BC, so ist in den Dreiecken ABCA, BDCB sowohl BC = BC als AC = BD und ABC = BCD (nach 72. Zus. 2. weil AB||CD), ferner BAC + BDC entweder größer oder kleiner als P; also ACB = CBD und folglich AC||BD (nach 72. Zus. 2.).

Zusatz 3. Wenn von dem Mittelpunkte eines Kreises nach einer Sehne eine Linie senkrecht gezogen wird, so halbirt diese die Sehne.

91. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folgen:
1) AB = ab	1) ABC = bac
2) AC = ac	2) ~~ABC~~ = abc BAC
3) BC = bc	3) ACB = acb

Vorbereit. Wenn man den Gründen gemäß (nach 1. Erkl.) die allgemeinen Verbindungen der Systeme aufsucht, so bleibt dabei überall unentschieden, ob in den-

selben die Ebenen der Dreiecke auf oder neben einander liegend anzunehmen seyen.

Stellt man sich die Ebenen der Dreiecke auf einander liegend vor, so lassen sich aus den Gründen, die solche Linien in sich enthalten, deren besondere Verbindung nicht schon in der allgemeinen liegt, weder nach 1. Erkl. noch nach 82. Lehrs. Beweisfolgen herleiten, weil sich weder einsehen läßt, daß gedachte Linien auf einander, noch, daß sie nicht auf einander liegen. Bedenkt man aber, daß die Wahrheit der Folgen davon abhängt, daß jene Linien auf einander liegen, so wird man bewogen, dieß indirekt nachzuweisen, wie im ersten Beweise geschieht.

Stellt man sich hingegen die Ebenen der Dreiecke neben einander liegend vor, so lassen sich aus den erwähnten Gründen (nach 82. Lehrs.) ohne Schwierigkeit Beweisfolgen herleiten; jedoch wird zu diesem Ende eine Vermehrung des Systems erfordert, und da die äußere Beziehung der Hülfslinie zu dem verbundenen Systeme auf verschiedene Weise gedacht werden kann, so ist der Beweis an so vielen Grundsystemen (nach 70. c.) besonders vorzunehmen. So entsteht der zweite Beweis.

Beweis I.

Verbind. Wenn 1) die Punkte A, a in einander und sowohl 2) die Linien AB, ab als 3) die Ebenen ABCA, abca auf einander lägen,

Bew. folge 1) aus Grund 1. und Verbind. 1 und 2. so müßte B in b liegen. (nach 1. Erkl.)

2) aus Folge 1.

Wollte man nun annehmen, daß BAC > bac, (nach XXXVI. c.)

3) aus Verbind. 1 und 2. und Bew.folge 3. so müßte man auch annehmen, daß ac diesseits AC läge (nach 40. Erkl.), also daß ein Grundsystem entstände, entweder wie in (Bild 52.), oder wie in (Bild 53.), oder wie in (Bild 54.), von denen aber (Bild 52.) schon durch Grund 3. widersprochen wird.

Vermehr. Zöge man nun (Bild 53. und 54.) von C nach c eine gerade Linie, (nach XXI. c.)

Bew.folge 4) aus Grund 2. Verbind. 1. und Bew.folge 3. so wäre ACc = AcC (nach 82. Lehrs.)

5) aus Grund 3. und Bew.folge 1 und 3. und BCc = BcC, (nach 82. Lehrs.)

6) aus Bew.folge 4. und 6. demnach sowohl AcC + BcC = ACc + BCc als ACc + BcC = AcC + BCc (nach 51. Lehrs.) von denen ersteres durch (Bild 54.) (nach 50. Zus. 3.) und letzteres durch (Bild 53.) (nach 56. Lehrs.) widersprochen wird.

Schluß. aus Bew.folge 2. 3 und 6. Also kann nicht BAC > bac seyn (nach XXXVI. c.). Ganz so läßt sich aber auch darthun, daß nicht BAC < bac seyn könne. Folglich muß BAC = bac seyn, und hierdurch wird obiger Lehrs. auf den in 89. aufgestellten zurückgeführt.

Beweis II.

Verbind. Wenn 1) die Punkte A, a in einander, 2) die Linien AB, ab auf einander und 3) die Ebenen ABCA, abca neben einander lägen,

Bew.folge 1) aus Grund 1. und Verbind. 1. und 2. so müßte B in b liegen. (nach 1. Erkl.)

Vermehr. Würde nun von C nach c eine gerade Linie gezogen, (nach XXI. c.)

Bew.folge 2) aus Verb. 1. Bew.folge 1. und Vermehr. so müßte eines von den (in Bild 44. 45. 46. 47. und 55.) ausgedrückten Grundsystemen entstehen;

3) aus Grund 2. Verbind. und Bew.folge 2. in jedem Falle aber wäre ACc = AcC *) (nach 82. Lehrs.)

4) aus Grund 3. Verbind. 2 und 3. und Bew.folge 1 und 2. und BCc = BcC **), (nach 82. Lehrs.)

5) aus Bew.folge 3 und 4. demnach ACB = AcB (nach 51. Lehrs. oder 52. Lehrs.)

Schluß. aus Verbind. 1. und Bew.folge 1 und 5. Folglich ist ACB = acb, und hierdurch wird dieser Lehrsatz auf den in 89. aufgestellten zurückgeführt.

Zusatz 1. Wenn (Bild 41.) von den Schenkeln eines Winkels ACB gleiche Stücke AC, BC abgeschnitten

*) Diese Beweisfolge kann bei Bild 46. übergangen werden.

**) Diese Beweisfolge kann bei Bild 55. übergangen werden.

sind, und der Punkt D gleichweit von A und B entfernt ist, so halbirt die Linie CD sowohl den Winkel ACB als den ADB, und es ist CAD = CBD. Dieser Zusatz bleibt wahr, der Winkel ACB mag hohl, flach oder erhaben seyn.

Zusatz 2. Wenn (Bild 42.) AC = BD und AB = CD, so sind sowohl AC und BD, als AB und CD gleichlaufend; denn zöge man BC, so entstünden zwei Dreiecke ABCA und BCDB, welchen die in obigem Lehrsatze aufgestellten Merkmale zukommen, woraus sich dann die Behauptung (nach 72. Zus. 2.) ergiebt.

Zusatz 3. Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Zentriwinkel.

Zusatz 4. Wenn von dem Mittelpunkt eines Kreises nach der Mitte einer Sehne eine gerade Linie gezogen wird, so steht diese senkrecht auf der Sehne.

Zusatz 5. Wenn eine Linie durch die Mitte einer Sehne geht und senkrecht auf ihr steht, so geht sie auch durch den Mittelpunkt des Kreises; denn zöge man von dem Mittelpunkt des Kreises eine Linie nach der Mitte der Sehne, so steht diese senkrecht auf der Sehne (nach Zus. 4.), und muß daher mit jener zusammenfallen. (nach 56. Zus. 4.).

92. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folge:
1) AB = ab.	ACB = acb.
2) AC = ac.	
3) ABC + abc = P.	

Vorbereit. Der Beweis dieses Lehrsatzes läßt sich führen, wie man auch die Verbindung der Systeme

den Beweismitteln gemäß unternimmt. Als Beispiel folgender

Beweis.

Verbind. Wenn 1) die Punkte A, a in einander, 2) die Linien AB, ab auf einander und 3) die Ebenen ABCA, abca neben einander lägen, (Bild 55.)

Bew.folge 1) aus Grund 1. und Verb. 1 und 2. so müßte B in b (nach 1. Erkl.)

2) aus Grund 3. Verbind. 2 und 3. und Bew.folge 1.
und BC neben bc liegen, (nach 38. Erkl.)

3) aus Grund 2. Verb. 1. und Bew.folge 1 und 2.
demnach ACB = AcB seyn. (nach 82. Lehrs.)

Schluß. aus Verbind. und Bew.folge 1 und 3.
Folglich ist ACB = acb. (nach 4. b.)

93. Lehrsatz.

Gründe:	Folge:
1) AB = ab.	AC = ac.
2) ACB = acb.	
3) ABC + abc = P.	

Vorbereit. Diese so wie der Beweis sind denen im vorhergehenden Lehrsatze ähnlich.

94. Lehrsatz.

Grund:	Folge:
1) AC=ac.	AB=ab
2) ACB=acb.	
3) ABC+abc=P.	

Vorbereit. Hier führen solche allgemeine Verbindungen, welche den zwei ersten Gründen angepaßt sind, zum kürzesten Beweis.

Beweis.

Verbind. Wenn 1) die Punkte C, c in einander und sowohl 2) die Linien AC, ac als 3) die Ebenen ABCA, abca auf einander lägen,

Bew.folge 1) aus Grund 1. und Verbind. 1 und 2. so müßte A in a (nach 1. Erkl.)

2) aus Grund 2. und Verbind. und BC auf bc liegen (nach 40. Erkl.),

3) aus Verbind. 1. und Bew.folge 1 und 2. demnach eines der (in Bild 27. 43. und 56.) ausgedrückten Grundsystemen entstehen (nach 10. am Ende), von denen sich (Bild 27.) von selbst erledigt,

4) aus Grund 3. und Bew.folge 3. und die beiden andern ABb=AbB geben. (nach 52. Zus. 10.)

Schluß. aus Bew.folge 1. 3 und 4. Folglich ist AB=ab. (nach 84. Lehrs.)

§. 8.

Von der Ungleichheit der Linien und Winkel in verschiedenen Dreiecken.

95. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folgen:
1) $BAC = bac$.	1) $ACB = acb$.
2) $ABC = abc$.	2) $AC > ac$.
3) $AB > ab$.	3) $BC > bc$.

Vorbereit. Der Beweis dieses Lehrsatzes wird mit Zuziehung des Beweismittels 72. Zus. 2. auf eine ähnliche Art als der in 87. geführt, wobei einer Erinnerung verdient, daß jede von den zwei letzten Folgen zu ihrem Beweise eine eigene allgemeine Verbindungsart fordert.

Zusatz. Wenn in einem Dreiecke eine Linie gleichlaufend mit einer Seite gezogen wird, so ist sie immer kleiner als diese Seite.

96. Lehrsatz.

Grundsystem: Bild 24.

Gründe:	Folgen:
1) $BAC = bac$	1) $AC > ac$
2) $ACB = acb$	2) $BC > bc$
3) $AB > ab$	3) $ABC = abc$.

Vorbereit. Dieser Lehrsatz läßt sich wie der vorige beweisen, aber auch sogleich auf diesen zurückführen, wenn man aus den zwei ersten Gründen (nach 80. Zus. 4.) die dritte Folge herleitet.

97. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folgen:
1) AB = ab	1) ACB < acb.
2) ABC = abc	2) BC > bc
3) BAC > bac	3) AC > ac, wenn ACB + acb < P AC < ac, wenn ACB + acb > P.

Vorbereit. Die Auffindung der zum Beweise erforderlichen Verbindungen hat keine Schwierigkeit. So geht der Beweis bis zur vierten Beweisfolge von Statten, und von da weiter, wenn man, was begreiflich geschehen muß, die Bedingung, unter welcher AC grösser oder kleiner als ac ist, als Grund zum Beweise der dritten Folge zieht.

Beweis.

Verbind. Wenn 1) die Punkte A, a in einander und sowohl 2) die Linien AB, ab als 3) die Ebenen ABCA, abca auf einander lägen (Bild 52.),

Bew.folge 1) aus Grund 1. und Verbind. 1 und 2.
so müßte B in b, (nach 1. Erkl.)

2) aus Grund 2. Verb. 2 und 3. und Bew.folge 1.
ferner BC auf bc (nach 40. Erkl.)

3) aus Grund 3. und Verbind.
und ac diesseits AC liegen (nach 40. Erkl.)

4) aus Bew.folge 2 und 3. und Verb. 1.
mithin wäre ACc < AcC, wenn

$ACB + acb < P$, und $ACc > AcC$, wenn $ACB + acb > P$. (nach 78. Zus. 4.)

Schluß 1) aus Verbind. 1. und Bew.folge 2 und 3 Folglich ist $ACB < acb$, (nach 78. Zus. 1.)

2) aus Bew.folge 1. 2 und 3. $BC > bc$, (nach 1. Erkl.)

3) aus Verbind. 1. und Bew.folge 4.
$AC > ac$, wenn $ACB + acb < P$. ⎫ (nach 85.
$AC < ac$, wenn $ACB + acb > P$. ⎭ Lehrs.)

Anmerk. Mittelst der in 90. Anmerk. angestellten Betrachtungen lassen sich auch hier besondere Lehrsätze bilden, die alle in dem obigen allgemeinen enthalten sind. Diese Anmerkung gilt auch für alle folgenden Lehrsätze.

98. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folgen:
1) $AB = ab$	1) $BAC > bac$
2) $ABC = abc$	2) $BC > bc$
3) $ACB < acb$.	3) $AC > ac$, wenn $ACB + acb < P$. $AC < ac$, wenn $ACB + acb > P$.

Vorbereitung. Dieser Lehrsatz wird auf den vorigen zurückgeführt, wenn man aus den zwei letzten Gründen die erste Folge herleitet; er läßt sich aber noch überdieß auf eine ähnliche Art wie der vorige beweisen.

99. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:

1) $AB = ab$

2) $ABC = abc$

3) $BC > bc$

Folgen:

1) $BAC > bac$.

2) $ACB < acb$

3) $AC > ac$, wenn $ACB + acb < P$; $AC < ac$, wenn $ACB + acb > P$.

Vorbereit. Dieser Lehrsatz läßt sich auf eine Art wie der in 97. aufgestellte beweisen; aber auch sogleich auf diesen zurückführen, wenn man die erste Folge mittelst 87. Lehrs. und 97. Lehrs. rein indirekt darthut.

100. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:

1) $AB = ab$.

2) $ABC = abc$.

3) $AC > ac$.

Folgen:

1) $BAC > bac$, wenn $ACB + acb < P$; $BAC < bac$, wenn $ACB + acb > P$.

2) $ACB < acb$, wenn $ACB + acb < P$; $ACB > acb$, wenn $ACB + acb > P$.

3) $BC > bc$, wenn $ACB + acb < P$; $BC < bc$, wenn $ACB + acb > P$.

Vorbereit. Die erste Folge läßt sich mittelst 87. Lehrs. und 97. Lehrs., die zweite mittelst 88. Lehrs. und

98. Lehrs., die dritte mittelst 89. Lehrs. und 99. Lehrs. rein indirekt nachweisen; derselbe Lehrsatz ist aber noch überdieß eines besondern Beweises fähig.

101. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folge:
1) AB = ab.	1) ABC < abc.
2) ACB = acb.	2) AC > ac, wenn ABC + abc > P. AC < ac, wenn ABC + abc < P.
3) CAB > cab.	3) BC > bc, wenn CAB + cab < P. BC < bc, wenn CAB + cab > P.

Vorbereit. Es hält nicht schwer, sich von der Wahrheit der ersten Folge zu überzeugen, und von dieser hängt die zweite ganz so ab, wie die dritte vom dritten Grunde; daher ist es hinreichend, eine von diesen beiden zu erweisen.

Fügt man zu diesem Ende die Bedingungen der zu erweisenden Folge zu den Gründen des Lehrsatzes, und erforscht man hierauf die den Gründen angemessenen allgemeinen Verbindungen auf eine ähnliche Art, wie in 90. geschehen ist, so stößt man auf einen Beweis, der dem dritten daselbst geführten sehr ähnlich ist.

102. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:

1) $AB = ab$.
2) $ACB = acb$.
3) $AC > ac$.

Folgen:

1) $BAC > bac$, wenn $ABC + abc > P$.
   $BAC < bac$, wenn $ABC + abc < P$.
2) $ABC < abc$, wenn $ABC + abc > P$.
   $ABC > abc$, wenn $ABC + abc < P$.
3) $BC > bc$, wenn $ABC + abc > P$, oder $BAC + bac > P$.
   $BC < bc$, wenn $ABC + abc < P$ und $BAC + bac < P$.

Vorbereit. Die beiden ersten Folgen lassen sich aus 88. Lehrs. und 101. Lehrs. rein indirekt herleiten. Aus diesen fließt dann auch nach vorhergehendem Lehrsatze die dritte, welche überdieß eines eigenen Beweises fähig ist, der dem zweiten in 90. Lehrs. ausgeführten völlig ähnlich ist.

103. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:

1) $AB = ab$.
2) $AC = ac$.
3) $BAC > bac$.

Folgen:

1) $BC > bc$.
2) $ABC > abc$, wenn $ACB + acb > P$.
   $ABC < abc$, wenn $ACB + acb < P$.
3) $ACB > acb$, wenn $ABC + abc > P$.
   $ACB < acb$, wenn $ABC + abc < P$.

Vorbereit. Wenn man auf die Bedingungen der zwei letzten Folgen keine Rücksicht nimmt, so entsteht auf ähnliche Art wie in 89. der Beweis für die erste Folge.

Auf demselben Wege lassen sich zwar auch die beiden andern Folgen beweisen; noch einfacher geschieht dieß aber, wenn man die erwiesene erste Folge als Grund gebraucht, dann stößt man durch Betrachtungen, welche in der Vorbereitung zu 91. vorkommen, auf einen Beweis, der dem zweiten daselbst geführten ähnlich ist.

104. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:

1) $AB = ab$

2) $AC = ac$.

3) $BC > bc$.

Folgen:

1) $BAC > bac$

2) $ABC > abc$, wenn $ACB + acb > P$.
$ABC < abc$, wenn $ACB + acb < P$.

3) $ACB > acb$, wenn $ABC + abc > P$.
$ACB < acb$, wenn $ABC + abc < P$.

Vorbereit. Dieser Lehrsatz läßt sich auf den vorigen zurückführen, wenn die erste Folge mittelst 89. Lehrs. und 103. Lehrs. rein indirekt nachgewiesen wird.

105. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:

1) $AB = ab$.

2) $AC = ac$.

3) $ABC > abc$.

Folgen:

1) $BC > bc$, wenn $ACB + acb > P$.
$BC < bc$, wenn $ACB + acb < P$.

2) $BAC > bac$, wenn $ACB + acb > P$.
$BAC < bac$, wenn $ACB + acb < P$.

3) $ACB > acb$, wenn $ACB + acb < P$ und $ABC + abc < P$.
$ACB < acb$, wenn $ACB + acb > P$, oder $ABC + abc > P$.

Vorbereit. Die erste Folge läßt sich aus 91. Lehrs. und 104. Lehrs. rein indirekt nachweisen; hierauf

ergeben sich auch die beiden andern unmittelbar aus vorhergehendem Lehrsatze.

106. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folge:
1) $AB = ab$.	$ACB < acb$.
2) $AC > ac$.	
3) $ABC + abc = P$.	

Vorbereit. Dieser Lehrsatz läßt sich wie der in 92. beweisen.

107. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folge:
1) $AB = ab$.	$AC > ac$.
2) $ACB < acb$.	
3) $ABC + abc = P$.	

Vorbereit. Dieser Lehrs. läßt sich aus 92. Lehrs. und 106. Lehrs. rein indirekt, überdieß auch wie der vorige beweisen.

108. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folge:
1) $AB = ab$.	$BC > bc$.
2) $BAC > bac$.	
3) $ACB + acb = P$.	

Vorbereit. Die gewöhnliche Behandlungsart dieses Lehrsatzes führt zu nachstehendem Beweise.

Beweis.

Verbind. Wenn 1) die Punkte A, a in einander, und sowohl 2) die Linien AB, ab als 3) die Ebenen ABCA, abca auf einander lägen,

Bew.folge 1) aus Grund 1. und Verb. 1 und 2. so müßte b in B (nach 1. Erkl.)

2) aus Grund 2. und Verbind. und ac diesseits AC liegen, (nach 40. Erkl.)

3) aus Verbind. und Bew.folge 1 und 2. demnach eines der Grundsysteme (s. Bild 52. 53 und 54.) entstehen, von denen sich ersteres sogleich erledigt.

Vermehr. Verlängerte man nun (in Bild 53.) die AC nach m und (in Bild 54.) die ac nach m, und zöge in beiden Fällen die Linie Cc,

Bew.folge 4) aus Grund 3. und Vermehr. so wäre (in Bild 53.) BCm = acb und (in Bild 54.) bcm = ACB, (nach 52. Zus. 10.)

5) aus Verbind. 1., Bew.folge 1 und 4. und Vermehr. also dort BCc < AcB und hier Bcm > BCc (nach 48. Lehrs.)

6) aus Bew.folge 5. und Vermehr. daher in beiden Fällen BCc < BcC (nach 49. Lehrs.)

Schluß. aus Bew.folge 1. 3 und 6. Folglich ist in jedem Falle BC > bc. (nach 85. Lehrs.)

109. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folge:
1) AB = ab	BAC > bac.
2) BC > bc.	
2) ACB + acb = P.	

Vorbereit. Der Beweis dieses Lehrsatzes fließt rein indirekt aus 94. Lehrs. und 108. Lehrs.; er läßt sich aber auch direkt führen, wenn man die Verbindung so anordnet, daß sich aus Grund 2. nach 1. Erkl. und aus Grund 3. nach 72. Zus. 2. Beweisfolgen herleiten lassen, d. h. wenn die Punkte B, b in einander, die Linien BC, bc auf einander und die Ebenen ABCA, abca neben einander liegend vorgestellt werden.

110. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folge:
1) BAC = bac.	BC > bc.
2) AB > ab.	
3) ACB + acb = P.	

Vorbereit. Die gewöhnliche Behandlungsart führt unter andern zu nachstehendem Beweise.

Beweis.

Verbind. Wenn 1) die Punkte B, b in einander und sowohl 2) die Linien AB, ab als 3) die Ebenen ABCA, abca auf einander lägen,

Bew. folge 1) aus Grund 2. und Verbind. 1 und 2. so müßte a diesseits A liegen, (nach 1. Erkl.)

Bew.folge 2) aus Grund 1. Verb. 2 und 3. und Bew.folge 1.
und ac an AB gleichlaufend mit AC seyn, (nach 66. Erkl.)

2) aus Bew.folge 2.
und es könnten sich AC, ac nicht schneiden, (nach 69. Lehrs.)

4) aus Verbind. und Bew.folge 1. und 3.
demnach müßte eines der Grundsysteme (Bild 57. 58. und 59.) entstehen, von denen sich ersteres von selbst erledigt.

Vermehr. Verlängerte man nun (in Bild 58.) AC und bc und (in Bild 59.) blos bc,

5) aus Bew.folge 2. und Vermehr.
so müßte bc die AC in einem Punkte m schneiden, (nach 72. Zus. 3.)

6) aus Bew.folge 2 und 5. und Verbind. 1.
und jedesmal bca = BmA, (nach 72. Zus. 2.)

7) aus Grund 3.
mithin ACB + BmA = P, (nach 57. Lehrs.)

8) aus Vermehr. und Bew.folge 7.
also BCm = BmA (nach 52. Zus. 10.) und daher BC = Bm seyn. (nach 84. Lehrs.)

Schluß. aus Verbind. und Bew.folge 1. 3 und 8.
Folglich ist jedesmal BC > bc. (nach 7. Zus. 1.)

111. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folge:
1) BAC = bac.	AB > ab.
2) BC > bc.	
3) ACB + acb = P.	

Vorbereit. Der Beweis dieses Lehrsatzes fließt rein indirekt aus 94. Lehrs. und 110. Lehrs.; er läßt sich aber auch direkt wie 109. führen.

§. 9.

Von der Gleichheit und Ungleichheit der Höhen in verschiedenen Dreiecken.

112. Die in beiden vorstehenden Paragraphen vorkommenden Lehrsätze begreifen alle Fälle, die Vergleichung der Seiten und Winkel in verschiedenen Dreiecken betreffend, in sich, wobei nicht mehr als höchstens ein Grund ungleiche Linien oder Winkel voraussetzt. Auf dieselbe Art lassen sich noch eine Menge Lehrsätze aufstellen, wenn in zwei oder gar in den drei Gründen ungleiche Stücke betrachtet werden, oder wenn statt eines solchen Elementes die Summe oder der Unterschied zweier andern gesetzt wird, und dergl. Hier werden nur noch einige Sätze, die Höhen der Dreiecke betreffend, aufgenommen, um zu zeigen, wie die genaue und vollständige Kenntniß der bisher vorgetragenen Elementarsätze einen sichern und tiefen Blick in verwandte Untersuchungen verschaffe. Hierbei wird die Höhe eines Dreiecks dadurch angedeutet, daß vor die Bezeichnung der Spitze, von welcher aus die Höhe gefällt wird, noch der Buchstabe H oder h gesetzt wird. So drückt (Bild 24.) HA die

von A auf BC, HB die von B auf AC, und HC die von C auf AB gefällte Höhe aus.

113. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folge:
1) AC = ac.	HC = hc.
2) BAC = bac.	

Vorbereit. Die Winkel BAC, bac mögen beide spitz oder beide stumpf seyn, so ergiebt sich der Beweis sogleich aus 88. Lehrs., in letzterm Falle aber hat man zuvörderst das Beweismittel 52. Zus. 8. in Anwendung zu bringen.

Zusatz 1. Punkte C, c sind von den Linien AB, ab gleich weit entfernt *), wenn die aus jenen Punkten gegen diese Linien unter gleichen Winkeln gezogenen Linien CA, ca einander gleich sind.

Zusatz 2. In zwei Dreiecken, welchen die Merkmale eines der von 87. bis 91. incl. stehenden Lehrsätze zukommen, sind alle gleichliegenden Höhen beziehlich gleich.

Zusatz 3. Zu den Folgen der von 92. bis 94. incl., so wie der von 97. bis 100. incl. aufgestellten Lehrsätze kann noch gefügt werden HA = ha.

Zusatz 4. In einem Kreise (Bild 60. und 61.) sind gleiche Sehnen BB und DD, so wie gleiche Sekanten AB und AD gleich weit vom Mittelpunkte C entfernt; denn zieht man CB, CD, so entstehen allemal zwei Dreiecke, denen die in 91. angegebenen Merkmale zukommen. (s. Zus. 2.)

*) Unter der Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie, versteht man die aus jenem Punkte auf diese Linie gezogene senkrechte.

114. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folge:
1) AC > ac.	HC > hc.
2) BAC = bac.	

Vorbereit. Der Beweis dieses Lehrsatzes geht wie der des vorigen von Statten, nur muß das Beweismittel 88. Lehrs. mit 96. Lehrs. verwechselt werden.

Zusatz 1. Wenn (Bild 24.) HC = hc und BAC = bac, so ist AC = ac; wenn aber HC > hc und BAC > bac, so ist AC > ac. (rein indirekt aus 113. Lehrs. und 114. Lehrs.)

Zusatz 2. Wenn (Bild 24.) die Punkte C, c gleich weit von den Linien AB, ab entfernt sind, so sind die aus jenen Punkten unter gleichen Winkeln gegen diese Linien gezogenen AC, ac einander gleich. (siehe Zus. 1.)

Zusatz 3. Zu den Folgen der in 95. und 96. aufgestellten Lehrsätze kann man noch fügen: HC > hc, HB > hb und HA > ha.

Zusatz 4. Zu den Folgen der in 97. 98. und 99. aufgestellten Lehrsätze: HC > hc.

Zusatz 5. Zu den Folgen des in 100. aufgestellten: HC > hc, wenn ACB + acb < P, und HC < hc, wenn ACB + acb > P.

Zusatz 6. Zu den Folgen des in 101. aufgestellten:

1) HA > ha, wenn ABC + abc > P
   HA < ha, wenn ABC + abc < P

2) HB > hb, wenn BAC + bac < P
   HB < hb, wenn BAC + bac > P.

Zusatz 7. Zu den Folgen des in 102. aufgestellten:

1) HA > ha

2) $\begin{cases} HB > hb, \text{ wenn } ABC + abc > P, \text{ oder } BAC + bac > P \\ HB < hb, \text{ wenn } ABC + abc < P \text{ und } BAC + bac < P. \end{cases}$

Zusatz 8. Zu den Folgen des in 110. und 111. aufgestellten: $HA > ha$.

115. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 24.

Gründe:	Folge:
1) $AC = ac$	$HC > hc$, wenn $CAB + cab < P$
2) $BAC > bac$	$HC < hc$, wenn $CAB + cab > P$.

Vorbereit. Es sind bei dem Beweise dieses Lehrsatzes folgende Fälle zu unterscheiden:

1) wenn $CAB + cab < P$, so muß cab immer spitz seyn, so daß also hc in die Ebene des Winkels cab fällt, CAB aber kann seyn
   a) ein spitzer, dann fällt HC in die Ebene des Winkels CAB,
   b) ein rechter, dann fällt HC in den Schenkel AC,
   c) ein stumpfer, dann fällt HC jenseits AC in die Verlängerung von AB;
2) wenn $CAB + cab > P$, so muß CAB immer stumpf seyn, so daß also HC jenseits AC in die Verlängerung von AB fällt, cab aber kann seyn
   a) ein spitzer, dann fällt hc in die Ebene des Winkels cab,
   b) ein rechter, dann fällt hc in den Schenkel ac,
   c) ein stumpfer, dann fällt hc jenseits ac in die Verlängerung von ab.

Der Beweis dieser besondern Fälle läßt sich nun

leicht mittelst 101. Lehrs. führen, wobei im erforderlichen Falle 55. Zus. 3 und 5. einwirkt.

Zusatz 1. Zu den Folgen der in 97. 98. und 99. aufgestellten Lehrsätze kann nun noch gefügt werden:

$HB > hb$, wenn $BAC + bac < P$.
$HB < hb$, wenn $BAC + bac > P$.

Zusatz 2. Zu den Folgen des in 100. aufgestellten:

$HB > hb$, wenn $CAB + cab < P$ und $ACB + acb < P$.
$HB < hb$, wenn $CAB + cab > P$ oder $ACB + acb > P$.

Zusatz 3. Zu den Folgen der in 103. und 104. aufgestellten:

1) $HC > hc$, wenn $CAB + cab < P$.
$HC < hc$, wenn $CAB + cab > P$.

2) $HB > hb$, wenn $CAB + cab < P$.
$HB < hb$, wenn $CAB + cab > P$.

3) $HA > ha$, wenn $ABC + abc > P$, oder $ACB + acb > P$.
$HA < ha$, wenn $ABC + abc < P$ und $ACB + acb < P$.

Zusatz 4. Zu den Folgen des in 105. aufgestellten:

1) $HA > ha$, wenn $ABC + abc < P$.
$HA < ha$, wenn $ABC + abc > P$.

2) $HB > hb$, wenn $CAB + cab > P$, oder $ACB + acb > P$.
$HB < hb$, wenn $CAB + cab < P$ und $ACB + acb < P$.

3) $HC > hc$, wenn $CAB + cab > P$, oder $ACB + acb > P$.
$HC < hc$, wenn $CAB + cab < P$ und $ACB + acb < P$.

Zusatz 5. Zu den Folgen der in 108. und 109. aufgestellten: HA > ha, weil immer ACB + ach < P.

Zusatz 6. In einem Kreise ist die kleinere Sehne weiter vom Mittelpunkte entfernt, als die größere; denn zieht man vom Mittelpunkte Radien nach den Endpunkten der Sehnen, so entstehen zwei Dreiecke, denen die in 104. Lehrs. angegebenen Merkmale zukommen, daher kommt ihnen auch die oben in Zus. 3. aufgestellte dritte Folge zu, welche sich mittelst 82. Zus. 3. in die hier gemachte Behauptung verwandelt.

Zusatz 7. In einem Kreise sind Sehnen einander gleich, wenn sie gleichweit vom Mittelpunkte entfernt sind; und von zwei ungleichweit entfernten ist die nähere die größere. (rein indirekt aus 113. Zus. 4. und vorigem Zusatze.)

Zusatz 8. Sey (Bild 60. oder 61.) C der Mittelpunkt des Kreises und AB, AD von einem Punkte A auslaufende Sekanten, und AB > AD: so ist AB von C weiter entfernt als AD, wenn ABC + ADC > P, oder wenn BAC + DAC > P; AB liegt aber dem Punkte C näher als AD, wenn ABC + ADC < P und BAC + DAC < P. Dieß erhellet sogleich aus der dritten im Zus. 3. angegebenen Folge, da den Dreiecken ACBA, ACDA die in 104. Lehrs. aufgezählten Merkmale zukommen.

Zusatz 9. Wenn (Bild 60. oder 61.) die Sekanten AB und AD gleichweit vom Mittelpunkte C entfernt sind, und weder ABC + ADC = P noch BAC + DAC = P ist, so ist AB = AD; wenn aber AB dem Mittelpunkte näher liegt als AD, so ist

AB > AD, wenn ABC + ADC < P und BAC + DAC < P, dagegen

AB < AD, wenn ABC + ADC > P, oder wenn BAC + DAC > P.

(rein indirekt aus 113. Zus. 4. und vorigem Zusatze.)

Anmerk. zu Zus. 8 und 9. Erwägt man, daß wenn der Punkt A ausserhalb des Kreises liegt (Bild 60.), allemal CAB < Q und CAD < Q, also CAB + CAD < P sey; und wenn A innerhalb des Kreises liegt (Bild 61.), allemal ABC < Q und ADC < Q, also ABC + ADC < P sey, wie sich aus 82. Zus. 3. ersehen läßt, so lassen sich aus den zwei letzten Zusätzen folgende herleiten:

a) Wenn (Bild 60.) AB > AD, so liegt AB dem Mittelpunkte näher, wenn ABC + ADC < P, dagegen ist AB vom Mittelpunkte entfernter, wenn ABC + ADC > P; und wenn (Bild 61.) AB > AD, so liegt AB dem Mittelpunkte näher, wenn BAC + DAC < P, dagegen ist AB vom Mittelpunkte entfernter, wenn BAC + DAC > P.

b) Wenn (Bild 60.) AB dem Mittelpunkte näher liegt als AD, so ist AB > AD, wenn ABC + ADC < P, dagegen AB < AD, wenn ABC + ADC > P; und wenn (Bild 61.) AB dem Mittelpunkte näher liegt als AD, so ist AB > AD, wenn BAC + DAC < P, dagegen AB < AD, wenn BAC + DAC > P.

Berücksichtigt man ferner, daß wenn (Bild 60.) sowohl AB als AD durch den Kreis gehen, allemal ABC < Q und ADC < Q, also ABC + ADC < P sey; und wenn sowohl AB als AD nur bis an den Kreis gehen, allemal ABC > Q und ADC > Q, also ABC + ADC > P sey, wie sich aus 82. Zus. 3. ersehen läßt, so ergeben sich aus den eben aufgestellten noch folgende besondere Fälle:

a) Wenn (Bild 60.) AB > AD, so liegt AB dem Mittelpunkte näher, wenn beide durch den Kreis gehen; dagegen ist AB vom Mittelpunkte entfernter, wenn beide nur bis an den Kreis gehen.

b) Wenn (Bild 60.) AB dem Mittelpunkte näher liegt als AD, so ist AB > AD, wenn beide durch den Kreis gehen, dagegen AB < AD, wenn beide nur bis an den Kreis gehen.

§. 10.

Zu den vier vorstehenden Paragraphen gehörige Aufgaben.

116. In der geometrischen Kunst läßt sich häufig die Lage eines gesuchten Punktes nach Anleitung einer von ihm geforderten Eigenschaft zwar nicht völlig bestimmen, aber doch in scharfe Grenzen einengen. Am merkwürdigsten ist der Fall, wo eine Linie von der Beschaffenheit angegeben werden kann, daß jedem Punkte in ihr, aber keinem ausser ihr, die geforderte Eigenschaft zukommt. Solche Linien werden Bestimmungslinien des gesuchten Punktes genannt. Es ist leicht einzusehen, daß der gesuchte Punkt, wenn er anders möglich ist, in jeder ihm zugehörigen Bestimmungslinie liegen müsse; wenn daher für einen solchen Punkt zwei von einander verschiedene Bestimmungslinien angegeben werden können, so wird durch sie die Natur des gesuchten Punktes gänzlich erkannt. Wenn sich nämlich beide Linien in gar keinem Punkte schneiden, so giebt es überhaupt keinen Punkt von der verlangten Beschaffenheit; wenn sich aber beide Linien in einem oder auch in zwei Punkten schneiden (dieß letztere kann geschehen, wenn Kreislinien als Bestimmungslinien auftreten), so kommt jedem derselben die

verlangte Beschaffenheit des gesuchten Punktes zu, jeder thut also der Aufgabe Genüge. Die Kenntniß der Bestimmungslinien erleichtert das Geschäft des Auflösens in vielen Fällen ungemein, daher hier gleich an der Spitze einige der gebräuchlichsten zur Sprache gebracht werden.

117. Aufgabe.

Die Entfernung eines gesuchten Punktes von einem gegebenen ist bekannt; man soll darnach eine Bestimmungslinie dieses gesuchten Punktes angeben.

Vorbereit. Zur Auflösung dieser Aufgabe führt die Natur der Kreislinie. Da nämlich alle Punkte der Kreislinie gleichweit vom Mittelpunkte entfernt sind, und jeder Punkt ausser der Kreislinie näher oder entfernter liegt, so ist die verlangte Bestimmungslinie eine Kreislinie, welche um den gegebenen Punkt mit der bekannten Entfernung als Radius beschrieben wird.

Zugabe. Man soll einen Punkt angeben, der von zwei andern gegebenen gleichweit entfernt ist. Nimmt man nach Gefallen eine bestimmte Entfernung an, und beschreibt für diese Entfernung zwei Bestimmungslinien des gesuchten Punktes, so haben die Durchschnittspunkte beider die verlangte Beschaffenheit. Damit sich die Bestimmungslinien durchschneiden, ist erforderlich, daß die nach Gefallen angenommene Entfernung nicht kleiner sey, als die halbe Entfernung der beiden gegebenen Punkte von einander.

118. Aufgabe.

Die Entfernung eines gesuchten Punktes von einer gegebenen Linie ist bekannt; man

soll darnach eine Bestimmungslinie dieses gesuchten Punktes angeben.

Vorbereit. Diese Auflösung fließt aus der (in 87. Zus. 3.) aufgezeichneten Beschaffenheit gleichlaufender Linien. Da nämlich alle Punkte einer Linie, welche mit einer andern gleichlaufend ist, von dieser gleichweit entfernt sind, und jeder ausser jener Linie liegende Punkt dieser näher oder entfernter liegt, so erhält man die verlangte Bestimmungslinie, wenn man durch einen Punkt, dessen Entfernung von der gegebenen Linie der bekannten gleich ist, mit der gegebenen eine gleichlaufende Linie zieht.

Zugabe. Man soll einen Punkt angeben, der von zwei gegebenen Linien gleichweit entfernt ist. Nimmt man nach Gefallen eine bestimmte Entfernung an, und beschreibt für diese Entfernung zwei Bestimmungslinien des gesuchten Punktes, so hat der Durchschnittspunkt beider die verlangte Beschaffenheit.

Anmerk. Man sieht leicht ein, daß die hier erhaltene Bestimmungslinie nach beiden Seiten hin unbegrenzt gedacht werden müsse. Uebrigens ist noch zu merken, daß es unbestimmbar viele Punkte giebt, die den zu beiden vorstehenden Aufgaben gehörigen Zugaben Genüge leisten.

119. Aufgabe.

Ein gesuchter Punkt ist von zwei gegebenen gleichweit entfernt; man soll darnach eine Bestimmungslinie dieses gesuchten Punktes angeben.

Vorbereit. Durch die (in §. 7 und 8.) betrachteten Eigenschaften der Dreiecke wird man zur Beschreibung

der hier verlangten Bestimmungslinie geleitet. Am leichtesten läßt sich dieselbe aus 89. Zus. 1. ableiten. Daselbst ist gelehret worden, daß jeder Punkt der Linie CD (Bild 41.) gleichweit von den Punkten A und B entfernt sey, wenn AC = BC und ACD = BCD, und nach 103. Lehrs. kann man sich überzeugen, daß diese Eigenschaft keinem ausser CD liegenden Punkte zukomme. Betrachtet man daher A und B als die gegebenen Punkte, und bestimmt dann einen Punkt C so, daß AC = BC (nach 117. Zug.) zieht hierauf CD so, daß ACD = BCD, so ist diese die verlangte Bestimmungslinie, welche man sich jedoch nach beiden Seiten hin unbegrenzt vorzustellen hat. In dem besondern Falle, wo ACB = P, erhält man die verlangte Bestimmungslinie CD, wenn man die gerade Linie AB halbirt, und durch den Halbirungspunkt CD senkrecht auf AB zieht.

Zugabe 1. Einen Punkt zu finden, der gleichweit von drei gegebenen entfernt ist. Man sucht zu dem Ende zwei Bestimmungslinien des gesuchten Punktes nach vorstehender Aufgabe, deren Durchschnittspunkt dann die verlangte Beschaffenheit hat. Zur Möglichkeit dieser Zugabe wird gefordert, daß sich beide Bestimmungslinien wirklich schneiden, welches geschieht, wenn die drei gegebenen Punkte nicht in einer geraden Linie liegen.

Zugabe 2. Um ein Dreieck eine Kreislinie zu beschreiben. Eine Kreislinie ist um ein Dreieck beschrieben, wenn in ihr die Ecken des Dreiecks liegen, d. h. wenn die Ecken gleichweit vom Mittelpunkte entfernt sind, und der Radius diesem Abstande gleich ist; man findet daher den Mittelpunkt der verlangten Kreislinie (nach Zug. 1.), worauf sich die Kreislinie selbst ohne Mühe beschreiben läßt.

Anmerk. Mehrere von den oben erwiesenen Lehrsätzen lassen sich noch auf eine besondere Weise darthun, wenn man nach Anleitung von Zug. 2. eine Vermehrung des nach der Verbindung entstandenen Systems den in 82. Zus. 10. und 12. stehenden Beweismitteln gemäß vornimmt.

120. Aufgabe.

Ein gesuchter Punkt ist von zwei sich schneidenden Linien gleichweit entfernt; man soll darnach eine Bestimmungslinie dieses gesuchten Punktes angeben.

Vorbereit. Zur Beschreibung dieser Bestimmungslinie führen die (in §. 7 und 8.) angeführten Eigenschaften der Dreiecke; auf dem kürzesten Wege die Betrachtung des in 89. befindlichen Zusatzes, wenn man dort die gleichen Winkel DAC und DCB rechte seyn läßt. Aus diesem Zusatze erhellet nämlich unter der gemachten Voraussetzung, daß jeder Punkt der Linie CD (Bild 41.) gleichweit von den Schenkeln des Winkels ACB entfernt sey, wenn ACD = BCD ist, und aus 101. Lehrs. ergiebt sich, daß diese Eigenschaft keinem ausser CD liegenden Punkte zukomme. Stellen daher CA und CB die gegebenen Linien vor, und zieht man durch den Punkt C, in welchem sich beide Linien schneiden, die CD so, daß DCA = DCB, so ist CD die verlangte Bestimmungslinie, die man sich aber nach beiden Seiten hin unbegrenzt denken muß.

Zugabe 1. Einen Punkt zu finden, der gleichweit von drei gegebenen Linien, wovon zwei die dritte schneiden, entfernt ist. Man sucht zu dem Ende nach vorstehender Aufgabe zwei Bestimmungslinien des gesuchten

Punktes, deren Durchschnittspunkt die verlangte Beschaffenheit hat.

Zugabe 2. In ein Dreieck eine Kreislinie zu beschreiben. Eine Kreislinie ist in ein Dreieck beschrieben, wenn die Seiten des Dreiecks Tangenten der Kreislinie werden, oder (nach 85. Zus. 8.) wenn die Entfernungen des Mittelpunkts von den Seiten des Dreiecks dem Radius des Kreises gleich sind; man findet daher den Mittelpunkt der verlangten Kreislinie (nach Zug. 1.), worauf sich die Kreislinie selbst ohne Mühe beschreiben läßt.

121. Aufgabe.

Die Linien, welche von einem gesuchten Punkte nach zwei gegebenen gezogen werden, bilden einen gegebenen Winkel mit einander; man soll hiernach eine Bestimmungslinie dieses gesuchten Punktes angeben.

Vorbereit. Als Auflösungsmittel müssen hier Sätze aufgesucht werden, nach welchen sich die Gleichheit solcher Winkel, deren Schenkel sich immer in zwei beständigen Punkten schneiden, beurtheilen läßt; diese findet man in 82. Zus. 10 und 11. Aus diesen Zusätzen erhellet nämlich, nicht nur daß alle Winkel, deren Schenkel durch die zwei Endpunkte eines Kreisbogens gehen, und deren Spitzen in diesem Kreisbogen liegen, unter einander gleich seyen, sondern auch daß kein Winkel, dessen Schenkel durch die genannten Endpunkte geht und dessen Spitze außer den erwähnten Kreisbogen auf derselben Seite von AB liegt, jenen gleich seyn könne. Stellt also M den gegebenen Winkel, und A, B (Bild 62.) die beiden gegebenen Punkte vor, so hat jeder Kreisbogen ACB die Eigenschaft der verlangten Bestimmungslinie, sobald ein Winkel ACB, dessen Spitze in diesem

Kreisbogen liegt und dessen Schenkel durch seine Endpunkte gehen, dem gegebenen Winkel M gleich ist, man erhält daher diesen Kreisbogen, wenn man erst AC beliebig, hierauf BC (nach 75. Aufg.) so zieht, daß ACB = M wird, und endlich um das Dreieck ACBA (nach 119. Zus. 2.) die Kreislinie ADBCA beschreibt. Um aber BC auf dieser Seite der Forderung gemäß ziehen zu können, muß die Lage von AC der Einschränkung unterliegen, daß BAC < P — M sey. So wie der Kreisbogen ACB auf der einen Seite der Aufgabe Genüge thut, so läßt sich immer noch ein zweiter solcher Kreisbogen auf der andern Seite von AB angeben. Beide zusammen machen die vollständige Bestimmungslinie aus.

Zugabe. Wenn der gegebene Winkel in vorstehender Aufgabe ein rechter ist, so muß (nach 82. Zus. 9.) der Mittelpunkt der zu beschreibenden Kreislinie in der Mitte von AB liegen. In diesem Falle bietet sich daher noch folgende besondere Auflösung an: Man halbire die gegebene Linie AB in F, beschreibe um F mit dem Radius AF eine Kreislinie, so ist diese die verlangte Bestimmungslinie.

122. Aufgabe.

Aus der Summe zweier Winkel eines Dreiecks den dritten zu finden.

Vorbereit. Die Auflösung dieser Aufgabe erhält man aus 80. Zus. 4.; hiernach ist der gesuchte Winkel der Nebenwinkel der gegebenen Summe.

Zugabe. Aus zwei Winkeln eines Dreiecks den dritten zu finden.

123. Aufgabe.

Ein Dreieck zu beschreiben, von dem eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

Grundsystem: ABCA in Bild 24.

Angaben:	Forderungen:
1) die Linie R.	1) AB = R.
2) der Winkel M.	2) BAC = M.
3) der Winkel N.	3) ABC = N.

Vorbereit. Da kein Theil des gesuchten Dreiecks ABCA seiner Lage nach gegeben ist, so muß eine Stellung des Grundsystems eintreten, wobei insbesondere auf die in den Forderungen erscheinenden Theile Rücksicht zu nehmen ist. Diesem gemäß erhält man folgende zur Auflösung taugliche Stellungen des gesuchten Dreiecks:

I. Irgend eine Ebene, in derselben eine Linie AC und in dieser einen Punkt A.

II. Irgend eine Ebene, in derselben eine Linie AB und in dieser entweder einen Punkt A oder B.

III. Irgend eine Ebene in derselben eine Linie BC und in dieser einen Punkt B.

Jede dieser Stellungen führt zu einer Auflösung, die nachstehender gleicht.

Auflösung.

Stellung. Man wähle 1) irgend eine Ebene, 2) in derselben eine Linie AC und 3) in dieser einen Punkt A,

Aufl. ford. 1) aus Angabe 2. und Stellung, ziehe AB so, daß BAC = M, (nach 57. Aufg.)

2) aus Angabe 1. Stellung 3. und Aufl.-ford. 1.
hierauf bestimme man B so, daß AB = R, (nach 23. Aufg.)

3) aus Angabe 3. Stellung 1. und Aufl.ford. 1 und 2.
endlich ziehe man in der gewählten Ebene die Linie BC so, daß ABC = N (nach 57. Aufg.)

4) aus Stellung 2. und Aufl.ford. 3.
und bemerke den Punkt C, in welchem sich AC und BC schneiden, wobei nöthigenfalls diese Linien verlängert werden müssen. (nach XXI. e.)

Schluß. aus Aufl.ford. 1—4.
so ist ABCA das verlangte Dreieck.

Anmerk. Zur Möglichkeit dieser Auflösung wird erfordert, daß sich AC, BC verlängert wirklich in einem Punkte C schneiden, welches geschieht, wenn M + N < P.

Zugabe 1. Ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, von dem eine Kathede und der an ihr liegende spitze Winkel gegeben sind.

Zugabe 2. Ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben, wenn einer von seinen gleichen Winkeln und die Seite, woran sie liegen, gegeben sind.

124. Aufgabe.

Ein Dreieck zu beschreiben, von dem eine Seite, der ihr gegenüberliegende und ein anliegender Winkel gegeben sind.

Vorbereit. Man kann aus den beiden gegebenen Winkeln des Dreiecks (nach 122. Zug.) sogleich den dritten finden, worauf wieder die vorige Aufgabe erscheint. Diese kann jedoch auch unabhängig von der vorigen gelöset werden.

Zugabe 1. Ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, dessen Hypotenuse und ein spitzer Winkel, oder dessen eine Kathede und der ihr gegenüber liegende Winkel gegeben sind.

Zugabe 2. Ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben, wenn eine von den gleichen Seiten und einer von den gleichen Winkeln gegeben sind.

125 Aufgabe.

Ein Dreieck zu beschreiben, von dem zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind.

Vorbereit. Aehnliche Betrachtungen, wie in 123. führen zur Auflösung dieser Aufgabe.

Zugabe 1. Ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, wenn seine beiden Katheden gegeben sind.

Zugabe 2. Ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben, wenn eine von seinen gleichen Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben ist.

126. Aufgabe.

Ein Dreieck zu beschreiben, von dem zwei Seiten und ein Winkel, der einer von diesen Seiten gegenüber liegt, gegeben sind.

Grundsysteme: ABCA in Bild 24.

Angaben:	Forderungen:
1) die Linie R.	1) $AB = R$.
2) die Linie S.	2) $AC = S$.
3) der Winkel M.	3) $ACB = M$.

Vorbereit. Die den Forderungen angemessenen Stellungen des gesuchten Systems sind folgende:

I. Irgend eine Ebene, in derselben eine Linie AB und in dieser einen Punkt A oder B.

II. Irgend eine Ebene, in derselben eine Linie AC und in dieser einen Punkt A oder C.

III. Irgend eine Ebene, in derselben eine Linie BC und in dieser einen Punkt C.

Wählt man eine der in I. vorkommenden Stellungen, wo z. B. A gegeben wird, so gelangt man durch folgende Betrachtungen zur Auflösung. Da durch die Stellung sowohl A als die Lage von AB gegeben ist, so fällt es nicht schwer aus Angabe 1. der ersten Forderung gemäß (nach 23. Aufg.) den Punkt B zu finden. Hierauf läßt sich sowohl aus Angabe 2. der zweiten Forderung gemäß (nach 117. Aufg.), als aus Angabe 3. der dritten Forderung gemäß (nach 121. Aufg.) eine Bestimmungslinie des gesuchten Punktes C angeben, und aus diesen der Punkt C finden.

Wählt man eine der in II. und III. vorkommenden Stellungen, z. B. die in III. enthaltene, so stößt man jedesmal auf eine Auflösung, zu der folgende Betrachtungen leiten. Da durch die Stellung die Ebene, die Spitze C und der Schenkel CB des Winkels ACB gegeben wird, so läßt sich aus Angabe 3. der dritten Forderung gemäß (nach 57. Aufgabe.) der Schenkel CA, und nun auch aus Angabe 2. der zweiten Forderung gemäß (nach 23. Aufgabe) der Punkt A finden. Beschreibt man hierauf aus Angabe 1. der ersten Forderung gemäß (nach 117. Aufg.) eine Bestimmungslinie des Punktes B, so liegt dieser in dem Durchschnittspunkte der gefundenen Bestimmungslinie und des bekannten Schenkels CB.

Anmerk. Zur Möglichkeit dieser Auflösungen ist erforderlich, daß sich jedesmal ein Durchschnittspunkt wirklich angeben lasse, welches geschieht 1) wenn M stumpf oder recht, und R > S ist; 2) wenn M spitz, und R größer ist als eine in dem Winkel M aus einem Punkte seines einen Schenkels, dessen Entfernung von seiner Spitze der Linie S gleich ist, auf seinen andern Schenkel gefällte senkrechte Linie. Oft lassen sich zwei solche Durchschnittspunkte angeben. In diesem Falle erhält man zwei Dreiecke, von denen das eine bei ABC einen spitzigen, das andere einen stumpfen Winkel hat, die aber beide die Forderungen der Aufgabe in sich enthalten. Soll alle Zweideutigkeit aufhören, so muß in diesem Falle die Art des Winkels ABC bekannt seyn.

Zugabe 1. Ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, dessen Hypotenuse und eine Kathede gegeben sind.

Zugabe 2. Ein gleichschenkliches Dreieck zu beschreiben, wenn eine von seinen gleichen Seiten und einer von seinen gleichen Winkeln gegeben sind. (vrgl. 124. Zus. 2.)

127. Aufgabe.

Ein Dreieck zu beschreiben, dessen drei Seiten gegeben sind.

Vorbereit. Wählt man vorerst die zur Stellung des gesuchten Dreiecks erforderlichen Elemente beliebig, so hält es nicht schwer, den noch unbekannten zweiten Endpunkt einer Seite des Dreiecks (nach 23. Aufg.), und hierauf für die dritte Ecke des Dreiecks (nach 117. Aufg.), den beiden noch übrigen Forderungen gemäß, zwei von einander verschiedene Bestimmungslinien zu finden, in

deren Durchschnittspunkte die noch unbekannte dritte Ecke des Dreiecks liegt.

Anmerk. Zur Möglichkeit dieser Auflösung wird erfordert, daß sich beide Bestimmungslinien wirklich schneiden, welches geschieht, wenn die Summe je zweier von den gegebenen Seiten immer größer als die dritte ist.

Zugabe 1. Ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben, wenn eine von seinen gleichen Seiten nebst der dritten gegeben sind.

Zugabe 2. Ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben, von dem eine Seite gegeben ist.

128. Nach vorstehenden Aufgaben läßt sich ein Dreieck beschreiben, wenn zwei seiner Winkel und eine Seite, oder wenn zwei seiner Seiten und ein Winkel, oder wenn seine drei Seiten gegeben sind. Läßt man eine Höhe des Dreiecks als Bestimmungsstück desselben eintreten, so sind folgende Aufgaben möglich:

a) Ein Dreieck ABCA (Bild 24.) zu beschreiben, wenn BAC, ABC und HA; oder wenn BAC, ABC und HC gegeben sind.

b) Ein Dreieck ABCA (Bild 24.) zu beschreiben, wenn BAC, AB und HA; oder wenn BAC, AB und HC gegeben sind.

c) Ein Dreieck ABCA (Bild 24.) zu beschreiben, wenn AB, ACB und HA; oder wenn AB, ACB und HC gegeben sind.

d) Ein Dreieck ABCA (Bild 24.) zu beschreiben, wenn AC, BC und HA; oder wenn AC, BC und HC gegeben sind.

Die Auflösungen dieser Aufgaben haben keine Schwierigkeit, wenn man nur bedenkt, daß die Höhe eines

Dreiecks mit ihrer Grundlinie einen rechten Winkel bildet, und während des Auflösens alle möglichen Fälle zu berücksichtigen nicht unterläßt.

Die noch folgenden Aufgaben sind größtentheils schon oben gelöset worden; hier aber lassen sich mit Hülfe der an Dreiecken entdeckten Eigenschaften für sie neue Auflösungen angeben. Dadurch wird man berechtiget, überall, wo ihre alten Auflösungen gebraucht worden sind, diese neuen anzuwenden, und so die Auflösungen aller vorhergehenden Aufgaben auf mannigfaltige Weise abzuändern.

129. Aufgabe.

Eine Linie hervorzubringen, die einer andern gegebenen gleich ist.

Vorbereit. Die in 87—90. incl. befindlichen Lehrsätze besitzen diejenigen Kennzeichen, welche sie zu Auflösungsmitteln für diese Aufgabe geschickt machen. Sie fordern, daß die gegebene Linie in einem Dreiecke liege (was sich, wenn es nicht schon ohnehin der Fall ist, leicht durch eine Vermehrung bewerkstelligen läßt), und hierauf ein zweites Dreieck mit solchen Merkmalen konstruiret werde, aus denen die Forderung der Aufgabe als nothwendige Folge hervorgeht, welches mit Hülfe einer der von 123—126. incl. gelöseten Aufgaben immer geschehen kann.

Sey z. B. AB (Bild 24.) die gegebene Linie. Wählt man nun noch irgend einen Punkt C ausser dieser Linie, so daß ein Dreieck ABCA entsteht, und beschreibt hierauf ein zweites Dreieck abca (Bild 24.), in welchem ac = AC, bac = BAC und acb = ACB wird (nach 123. Aufg.), so ist auch ab = AB (nach 87. Lehrs.); oder be-

schreibt man das Dreieck abca so, daß ac = AC, bc = BC und acb = ACB wird (nach 125. Aufg.), so ist abermal ab = AB (nach 89. Lehrs.). Hierbei können die Dreiecke ABCA, abca noch in einer bestimmten wechselseitigen Beziehung zu einander betrachtet werden, wodurch die hier aus dem allgemeinsten Gesichtspunkte erhaltenen Auflösungen in besondern Fällen eine noch vortheilhaftere Gestalt annehmen können.

Obgleich die auf diese Weise sich ergebenden Auflösungen zusammengesetzter sind als die oben (in 23. Aufg.) vorhandenen, auf welche sie sich stützen, so sind sie doch in der Ausübung von Nutzen, da, wo jenen einfachern schwer zu beseitigende Hindernisse in dem Wege stehen.

130. Aufgabe.

Einen Winkel hervorzubringen, der einem andern gegebenen gleich ist.

Vorbereit. Zu Auflösungsmitteln sind hier alle von 87—91. incl. erwiesenen Lehrsätze geschickt, von denen jeder auf ähnliche Art wie in vorhergehender Aufgabe besondere Auflösungen giebt. Unter diesen sind die aus 89. und 91. entspringenden am merkwürdigsten; denn 87. und 88. führen zu Auflösungen, deren Zweck sich leichter noch (nach 122. Aufg. oder Zug.) erreichen läßt, und die aus 90. sich ergebende Auflösung ist wegen ihrer Zweideutigkeit den andern nachzusetzen.

Wenn daher BAC (Bild 24.) den gegebenen Winkel vorstellt, und man in jedem Schenkel desselben nach Gefallen einen Punkt wählt, um ein Dreieck ABCA zu erhalten, so läßt sich vorstehende Aufgabe auf nachstehende zwei Arten auflösen:

1) Man beschreibe (nach 125. Aufg.) ein zweites Dreieck abca, in welchem ab = AB, abc = ABC und

bc = BC wird, so ist bac = BAC (nach 89. Lehrs.).
2) Man beschreibe (nach 127. Aufg.) ein zweites Dreieck abca, in welchem ab = AB, ac = AC und bc = BC wird, so ist bac = BAC (nach 91. Lehrs.).

Anmerk. Insbesondere wird die zweite hier gegebene Auflösung sehr häufig gebraucht; man pflegt dabei der Bequemlichkeit halber die Punkte B und C in den Schenkeln des gegebenen Winkels so zu wählen, daß AB = AC wird.

131. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie zu halbiren.

Grundsystem: Bild 34. oder 63.

Angabe:	Forderung:
die Lage von A zu B.	D in AB so, daß AD = BD.

Vorbereit. Auch hier eignen sich die in 87. bis 90. stehenden Lehrsätze zu Auflösungsmitteln, nach welchen durch eine Vermehrung zwei Dreiecke hervorzubringen sind, in deren einem AD, im andern BD, als Seite erscheint, und denen in der Auflösung solche Merkmale gegeben werden, daß nach einem der gedachten Lehrsätze die in der Aufgabe ausgedrückte Forderung AD = BD eine nothwendige Folge jener Merkmale wird. Es können aber diese Dreiecke neben einander liegend, wie ADCA und BDCB (Bild 34.), oder einander entgegengesetzt seyn, wie ADCA und BDEB (Bild 63.). Jedesmal muß jedoch die Konstruktion von den gegebenen Punkten A und B ausgehen.

Im ersten Falle (Bild 34.) müssen den Auflösungsforderungen gemäß AC und BC so gezogen werden, daß AC = BC wird (nach 117. Zug.), und hierauf CD entweder so, daß ACD = BCD (nach 58. Aufg.), oder so

daß ADC = BDC wird (nach 75. Zug.). Es ist hier nur der besondere Fall betrachtet worden, wo die gleichen Linien AC, BC in einem Punkte C zusammenstoßen, (was das Auflösungsmittel nicht schlechterdings fordert), weil so die einfachste Auflösung entsteht; doch gelangt man auch ohne diese besondere Bestimmung, wiewohl auf eine umständlichere Weise, zum Ziele.

Im andern Falle (Bild 63.) müssen den Auflösungsforderungen gemäß die Linien AC und BE so gezogen worden, daß DAC = DBE wird, hierauf muß AC = BE, und endlich noch entweder ACD = BED oder ADC = BDE gemacht werden. Das eine sowohl als das andere der beiden letztern Merkmale entsteht, wenn von C nach E eine gerade Linie gezogen wird, welche da, wo sie die AB schneidet, den gesuchten Punkt D zu erkennen giebt.

132. Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Vorbereit. Durch die (in §. 7.) angeführten Auflösungsmittel erhält man auf ähnliche Weise, wie bei vorhergehender Aufgabe, die hieher gehörigen Auflösungen, welche sich aber noch bequemer aus den ersten (in 90. und 91.) vorhandenen Zusätzen herleiten lassen.

133. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt, der in einer gegebenen Linie liegt, auf diese eine senkrechte zu errichten.

Grundsystem: Bild 64.

Angabe:	Forderung:
Der Punkt D in AB.	DC so, daß ADC = Q.

Vorbereit. Hierher taugliche Auflösungsmittel findet man (in 44. Erkl. und 82. Zus. 9.). Ersteres will,

daß ADC = BDC, d. h. daß der flache Winkel ADB halbiret werde, welches nur ein besonderer Fall der vorhergehenden Aufgabe ist. Letzteres verlangt, daß ADC ein Peripheriewinkel werde, dessen zugehöriger Zentriwinkel ein flacher Winkel ist; dieß geschieht auf folgende Weise: Um irgend einen Punkt F, der ausser AB liegt, beschreibe man mit dem Radius FD eine Kreislinie; von dem Punkte E, in welchem AB von der Kreislinie zum zweiten Male geschnitten wird, ziehe man durch F den Durchmesser, welcher die Kreislinie in C schneidet. Zieht man nun von C nach D eine gerade Linie, so ist diese die verlangte senkrechte. Im Falle die Linie AB von der Kreislinie nicht in zwei Punkten geschnitten würde, wird sie von ihr in D berührt, dann ist FD selbst die verlangte senkrechte (nach 85. Zus. 8.).

134. Aufgabe.

Aus einem gegebenen Punkte, der ausserhalb einer gegebenen Linie liegt, auf diese eine senkrechte zu fällen.

Grundsysteme: Bild 64. oder 65. oder 66.

Angabe:	Forderung:
Die Lage von C zu AB.	CD so, daß CDA = Q.

Vorbereit. Auch für diese Aufgabe finden sich keine andern als die (in 44. Erkl. und 82. Zus. 9.) stehenden Auflösungsmittel.

Letzteres will, daß ADC ein Peripheriewinkel werde, dessen zugehöriger Zentriwinkel = P ist, und giebt daher folgende Auflösung an die Hand: Von C nach irgend einem Punkte E in der Linie AB ziehe man CE und halbire sie in F; um F mit dem Radius FE beschreibe man eine Kreislinie, welche die AB noch in D

schneidet. Zieht man nun CD, so ist diese die verlangte senkrechte. Im Falle die AB von der Kreislinie in E berührt werden sollte, ist CE selbst die verlangte senkrechte (nach 85. Zus. 8.)

Ersteres verlangt, daß ADC einem seiner Nebenwinkel gleich werde, welches zu bewerkstelligen, die schon oft erwähnten, von 87. bis 91. stehenden Lehrsätze angewendet werden müssen; es kann aber dabei entweder der Nebenwinkel CDB (Bild 65.), oder der durch die Verlängerung von CD entstehende ADF (Bild 66.) in Betrachtung gezogen werden. Hieraus fließen folgende zwei Auflösungen:

Im ersten Falle müssen nämlich zwei Dreiecke EDCE und FDCF (Bild 65.) mit solchen Merkmalen hervorgebracht werden, daß nach einem der gedachten Lehrsätze die Forderung ADC = BDC eine nothwendige Folge wird. Zieht man zu dem Ende zwei Linien CE und CF so, daß CE = CF wird, welches geschieht, wenn beide Linien Radien einer um C beschriebenen Kreislinie werden; hierauf CD so, daß entweder ED = FD (nach 24. Aufg. oder 131. Aufg.), oder daß ECD = FCD wird (nach 58. Aufg. oder 132. Aufg.), so ist diese die verlangte senkrechte.

Im zweiten Fall müssen zwei Dreiecke ECDE und EFDE (Bild 66.) hervorgebracht werden, in welchen die Forderung ADC = ADF nach einem der gedachten Lehrsätze eine nothwendige Folge ihrer durch die Auflösung erhaltenen Merkmale wird. Zieht man zu dem Ende aus C nach einem beliebigen Punkte in AB die CE; hierauf EF so, daß BEF = BEC (nach 57. Aufg. oder 130. Aufg.) und EF = EC wird (nach 23. Aufg.), so ist die von C nach F gezogene Linie, welche die AB in D schneidet, die verlangte senkrechte.

135. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt, der in einer gegebenen Kreislinie liegt, an diese eine Tangente zu ziehen.

Vorbereit. Die Auflösung dieser Aufgabe erhält man sogleich aus 85. Zus. 8. Hiernach hat man nämlich weiter nichts zu thun, als von dem gegebenen Punkte nach dem Mittelpunkte der gegebenen Kreislinie einen Radius zu ziehen, und auf demselben eine senkrechte Linie zu errichten, die durch den gegebenen Punkt geht, so ist diese die verlangte Tangente.

136. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt, der jenseits einer gegebenen Kreislinie liegt, gegen diese eine Tangente zu ziehen.

Grundsysteme: Bild 67.

Angaben:	Forderung:
1) die Kreislinie BEFB, deren Mittelpunkt C ist.	AB so, daß sie Tangente der Kreislinie wird.
2) die Lage von A zur Kreislinie.	

Vorbereit. Das hierher gehörige (in 85. Zus. 8.) stehende Auflösungsmittel schreibt vor, die gesuchte Linie AB nach dem Endpunkte B desjenigen Radius BC zu ziehen, welcher mit der gesuchten AB einen rechten Winkel bildet; es ist demnach in der gegebenen Kreislinie ein Punkt B von der Beschaffenheit zu finden, daß die Linien BA, BC, welche aus diesem Punkte nach den gegebenen A und C gezogen werden, senkrecht auf einander stehen. Hieraus ergeben sich folgende Auflösungen:

Einmal erhält man den gesuchten Punkt B, wenn man (nach 121. Zug.) eine Bestimmungslinie desselben, der Forderung ABC = Q gemäß, aufsucht; denn da derselbe auch in der gegebenen Kreislinie liegen muß, so ist es derjenige, in welchem die Kreislinie von der Bestimmungslinie geschnitten wird. Man erhält auf jeder Seite der Linie AC einen solchen gesuchten Punkt.

Zum andern wird (nach 44. Erkl.) ABC = Q, wenn ABC = ABD ist, wobei ABD den Nebenwinkel von ABC und also CBD eine gerade Linie vorstellt. Um aber die Forderung ABC = ABD an dem aufgestellten Systeme hervorzubringen, wird man zur Konstruktion zweier Dreiecke ABCA und ABDA getrieben, in welchen jene Forderung nach einem der von 87. bis 91. aufgeführten Lehrsätze eine nothwendige Folge der durch die Auflösung den Dreiecken beigelegten Merkmale wird. Der in 91. erwiesene Lehrsatz fordert, daß AD = AC und BD = BC, oder, weil CBD eine gerade Linie bildet, CD = 2. BC werde. So entsteht folgende Auflösung: Zuerst beschreibe man (nach 118. Aufg.) eine Bestimmungslinie des gesuchten Punktes D in Gemäßheit der Forderung AD = AC; hierauf (nach 118. Aufg.) eine zweite in Gemäßheit der Forderung CD = 2. BC, d. h. CD gleich dem Durchmesser der gegebenen Kreislinie. Zieht man hierauf von dem Punkte D, in welchem sich beide Bestimmungslinien schneiden, eine gerade Linie nach C, so schneidet diese die gegebene Kreislinie in dem gesuchten Punkte B.

137. Aufgabe.

Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels eine gerade Linie so zu ziehen, daß

sie von einem gegebenen, in der Ebene des Winkels liegenden Punkte halbirt werde.

Grundsystem: Bild 68.

Angaben:	Forderung:
1) der Winkel MSN.	die Linie AB durch C, so
2) die Lage von C zu MSN.	daß AC = BC wird.

Vorbereit. Zieht man auch hier die schon oft gebrauchten von 87. bis 91. befindlichen allgemeinsten Auflösungsmittel zu Rathe, so wird man zur Konstruktion zweier Dreiecke getrieben, von denen das eine AC das andere BC zur Seite bekommt, und in denen die Forderung AC = BC eine nothwendige Folge der durch die Auflösung ihnen mitgetheilten Merkmale wird, wie sich aus einem der erwähnten Lehrsätze ergeben muß. Es können aber diese Dreiecke entweder nach einer Seite der Linie AB, oder nach der entgegengesetzten zu liegen. In beiden Fällen gelangt man zu einer Auflösung vorliegender Aufgabe; in letzterem jedoch zu einer einfachern, deren Entstehung hier umständlicher gezeigt werden soll.

Um ein Dreieck zu erhalten, worin eine der gedachten Linien, z. B. BC, Seite wird, ziehe man von dem Punkte C aus nach irgend einem Punkte des Schenkels SN eine gerade Linie, z. B. CS*) wodurch das Dreieck SCBS hervorgebracht wird. Zu diesem Dreiecke muß nun noch ein zweites DCAD kommen, welches mit dem erstern die in den Gründen eines der oben genannten Auflösungsmittel vorkommenden Merkmale gemein hat; und da außer C kein Punkt des letztern Dreiecks bekannt ist, so muß davon die Konstruktion ausgehen. Diesem

*) Die Auflösung geht ganz auf die hier angegebene Weise von Statten, wenn gleich diese Linie nach irgend einem andern in dem Schenkel SN liegenden Punkte gezogen wird.

gemäß ziehe man CD so, daß ACD = BCS wird, welches geschieht, wenn SC jenseits C verlängert wird, (nach 52. Zus. 12., weil ACB eine gerade Linie bilden soll), mache CD = CS (nach 23. Aufg.) und CDA = CSB, welches unmittelbar (nach 57. Aufg. oder 130. Aufg.) geschehen kann, aber auch mittelbar dadurch sich bewerkstelligen läßt, daß man (nach 74. Aufg.) durch D eine Linie gleichlaufend mit SN zieht. Zieht man hierauf von dem Punkte A, in welchem DA, den Schenkel SM schneidet, nach C eine gerade Linie und verlängert sie jenseits C bis sie den andern Schenkel SN in B schneidet, so ist AB die verlangte Linie.

§. 11.

Von den Vielfachen, Verhältnissen und Maßen der Linien in Dreiecken.

138. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 69.

Gründe:	Folge:
1) DF ‖ EG.	AC = FG.
2) AB = DE.	
3) ABC = DEG.	
4) ACB = FGE.	

Vorbereit. Wenn man, dem zweiten und dritten Grunde gemäß, eine Verbindung der hier aufgestellten Systeme anordnet, so ergiebt sich der Beweis mit Zuziehung des im 87. Zusatz 2. stehenden Beweismittels ohne alle Schwierigkeit; dasselbe geschieht aber auch, wenn statt der Verbindung eine Vermehrung des Systems DEGFD gewählt wird, wobei eine Linie durch einen Endpunkt entweder der Linie DE oder der Linie FG gleichlaufend mit der andern von den genannten Linien

gezogen wird. Man erhält den Beweis aber noch überdieß ohne alle Vorkehrung, wenn man die in 113. Zus. 1. und 114. Zus. 2. angeführten Beweismittel in Verbindung mit 87. Zus. 3. zu Hülfe nimmt.

Anmerk. Dieser Lehrsatz, welcher schon oben als Zusatz hätte aufgeführt werden können, gehört eigentlich nicht in diesen Paragraphen; er wird aber deswegen hier besonders aufgestellt, weil durch ihn die Beweise der folgenden Lehrsätze bedeutend abgekürzt werden.

Zusatz 1. Wenn (Bild 69.) in dem Flächensysteme DEGFD die Linie DF gleichlaufend mit GE ist, so läßt sich immer ein Dreieck ABCA angeben, in welchem AB = DE, AC = FG, ABC = DEG und ACB = FGE ist.

Zusatz 2. Wenn (Bild 69.) DF || EG, AB > DE ABC = DEG und ACB = FGE ist, so ist auch AC > FG; denn sey m der Punkt in AB, wobei Am = DE, ferner werde durch m eine Linie gleichlaufend mit BC gezogen, so liegt der Punkt n, in welchem diese die AC schneidet, diesseits C, und es kommen dem Dreiecke AmnA mit dem Flächensysteme DEGFD die Gründe des vorstehenden Lehrsatzes zu, daher ist auch An = FG und folglich AC > FG, weil n diesseits C liegen muß.

139. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 70.

Gründe:	Folge:
1) BAC = bac	AC = m. ac
2) ABC = abc	
3) AB = m. ab.	

Vorbereit. Der Beweis dieses Lehrsatzes läßt sich nach Anleitung des in 138. befindlichen Beweismittels so führen:

a) Theilt man die Linie AB durch ab, so entstehen m Theile Am, mn, no, u. s. f., wovon jeder der Linie ab gleich ist, wie aus Grund 3 sich ergiebt.

b) Zieht man durch die Theilungspunkte m, n, o, u. s. f. die Linien mp, nq, or, u. s. f. gleichlaufend mit BC, so wird auch die Linie AC in m sich ergänzende Theile Ap, pq, qr, u. s. f. getheilt, wie sogleich aus a. hervorgeht.

c) Jeder von diesen Theilen Ap, pq, qr, u. s. f. ist der Linie ac gleich. Denn da die Linien mp, nq, or, u. s. f. alle gleichlaufend mit BC sind, so ist erstlich jede mit ihrer zunächst liegenden gleichlaufend, dann sind aber auch nicht nur die Winkel Amp, Anq, Aor, u. s. f. dem ABC und also auch (siehe Grund 2.) dem abc gleich, sondern es sind auch die Winkel Apm, Aqn, Aro, u. s. f. dem ACB und also dem acb gleich, weil, wie sich aus Grund 1 und 2. ergiebt, ACB = acb ist; hieraus nun und aus a. läßt sich zeigen, (nach 87. Lehrs.) daß Ap = ac, (nach 137. Lehrs.) daß pq = ac, qr = ac, u. s. f.

d) Da nun die Linie AC aus m sich ergänzenden Theilen besteht (siehe b.), wovon jeder der Linie ac gleich ist (siehe c.), so ist AC = m. ac.

Zusatz. Wenn (Bild 70.) AB = m. ab, AC = m. ac und BAC = bac, so ist auch ABC = abc und ACB = acb; denn wäre ABC kleiner oder größer als abc, so ließe sich Bx so ziehen, daß ABx = abc würde, dann wäre Ax größer oder kleiner als AC und doch Ax = m. ac, welches, da AC = m. ac ist, (nach 30. Zus.) nicht denkbar ist. Eben so läßt sich auch zeigen, daß ACB weder grösser noch kleiner als acb seyn könne.

140. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 70.

Gründe:

1) BAC = bac.

2) ABC = abc.

Folge:

AB : ab = AC : ac

Vorbereit. Dieser Lehrsatz läßt sich auf folgende Art beweisen, wobei das in 34. Erkl. stehende Begründungsmittel den Gang und die Hauptpunkte des Beweises an die Hand giebt:

a) Es ist ac eben so oft in AC als ab in AB enthalten, und wenn hier ein Rest bleibt, so findet dieß auch bei jener Theilung Statt. Denn es bleibe bei der Theilung von AB durch ab der Rest oB (wenn kein Rest bliebe, so wäre AB ein Vielfaches von ab, so daß sich dieser Lehrsatz in den vorhergehenden verwandelte) und sey Ao = m. ab *). Zieht man nun durch o die Linie or gleichlaufend mit BC, so ist (nach 138. Lehrs.) Ar = m. ac und, weil der Rest oB kleiner als ab, (nach 137. Zus. 2.) rC < ac, folglich ist rC der bei der Theilung von AC durch ac entstehende Rest.

b) Der erste Rest rC ist in ac eben so oft als der erste Rest oB in ab enthalten, und wenn bei der Theilung von ab durch oB ein zweiter Rest entsteht, so ist dieß auch bei der Theilung von ac durch rC der Fall. Denn

*) In dem Falle, wo ab > AB, ist auch ac > AC; dann ist also sowohl ac in AC als ab in AB gar nicht enthalten, und AC, AB selbst sind die bei diesen Theilungen bleibenden Reste, so daß von da erst die Betrachtung in a) anhebt.

(nach 137. Zus. 1.) läßt sich immer ein Dreieck $\alpha\beta\gamma\alpha$ beschreiben, in welchem $\alpha\beta = oB$, $\alpha\gamma = rC$, $\alpha\beta\gamma = ABC$ und $\alpha\gamma\beta = ACB$, also auch $\beta\alpha\gamma = BAC$ ist, daher ist (siehe Grund 1 und 2.) $\beta\alpha\gamma = bac$ und $\alpha\beta\gamma = abc$; es kommen demnach den Dreiecken abca und $\alpha\beta\gamma\alpha$ die Gründe des hier angegebenen Lehrsatzes zu und es ist folglich (nach a.) $\alpha\gamma$ in ac eben so oft als $\alpha\beta$ in ab enthalten, und wenn hier ein Rest bleibt, so tritt dieser Umstand auch dort ein, woraus, weil $\alpha\gamma = rC$ und $\alpha\beta = oB$, die hier aufgestellte Behauptung hervorgeht.

c) Der in dem Verhältnisse AC:ac entstehende zweite Rest ist in dem ersten rC eben so oft als der in dem Verhältnisse AB:ab bleibende zweite Rest in dem ersten oB enthalten, und bleibt hier ein dritter Rest, so bleibt auch dort einer, u. s. f. Hierbei ist nur stets die in b angestellte Betrachtung zu wiederholen.

d) Aus a. b. und c. ergiebt sich nun sogleich, nach der für die Gleichheit zweier Verhältnisse gegebenen Erklärung, daß AB : ab = AC : ac.

Zusatz 1. Wenn (Bild 70.) AB : ab = AC : ac und BAC = bac, so ist auch ABC = abc und ACB = acb; denn wäre ABC kleiner oder größer als abc, so ließe sich Bx so ziehen, daß ABx = abc würde, dann wäre Ax kleiner oder größer als AC und doch nach vorstehendem Lehrsatze Ax : ac = AB : ab, also auch Ax : ac = AC : ac, welches (nach 34. Zus. 1.) nicht denkbar ist. Ganz so läßt sich auch zeigen, daß ACB weder kleiner noch größer als acb seyn könne.

Zusatz 2. Wenn in einem Dreiecke ABCA (Bild 69.) mn gleichlaufend mit BC gezogen wird, so ist sowohl Am : Bm = An : Cn als AB : Bm = AC : Cn; denn es läßt sich (nach 137. Zus. 1.) ein Dreieck $\alpha\beta\gamma\alpha$ angeben, in welchem $\alpha\beta$ = mB, $\alpha\gamma$ = nC und $\alpha\beta\gamma$ = ABC = Amn, $\alpha\gamma\beta$ = ACB = Anm, also $\beta\alpha\gamma$ = BAC = mAn ist; daher ist nach obigem Lehrsatze sowohl Am : $\alpha\beta$ = An : $\alpha\gamma$ als AB : $\alpha\beta$ = AC : $\alpha\gamma$, woraus sich die hier aufgestellten Proportionen ergeben, wenn man statt $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ beziehlich ihre Werthe Bm, Cn setzt.

141. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 70.

Gründe:	Folge:
1) BAC = bac.	AB :: M = AC :: N.
2) ABC = abc.	
3) ab und ac die Grundtheile gleichartiger Gemäße M und N.	

Vorbereit. Hierher gehört das (in 37. Erkl.) enthaltene Begründungsmittel, nach welchem sich auf ähnliche Weise wie im vorhergehenden Lehrsatze folgender Beweis bildet:

a) Es ist der Grundtheil ac des Gemäßes N in AC eben so oft enthalten als der Grundtheil ab des Gemäßes M in AB, und wenn bei dieser Theilung ein Rest oB bleibt, so bleibt auch bei jener Theilung ein Rest rC *). Dieß läßt sich ganz so darthun, wie es bei

*) In dem Falle, wo ab > AB, ist auch ac > AC; dann sind also die Grundtheile ab, ac gar nicht in den Linien AB, AC enthalten, sondern diese selbst sind die Reste, so daß man sogleich zu den ersten abgeleiteten Theilen übergehen kann.

einem ähnlichen Falle in der Vorbereitung zu vorhergehendem Lehrsatze (siehe daselbst a.) gezeigt worden ist.

b) Der erste abgeleitete Theil des Gemäßes N ist in dem ersten Reste rC von AC eben so oft enthalten als der erste abgeleitete Theil des Gemäßes M in dem ersten Reste oB von AB, und wenn hier ein zweiter Rest entsteht, so ist dieß auch dort der Fall. Denn stellt man sich ein Dreieck $\alpha\beta\gamma\alpha$ vor, in welchem $\alpha\gamma$ der erste abgeleitete Theil von N, $\alpha\beta$ der erste abgeleitete Theil von M und $\beta\alpha\gamma$ = bac ist, so ist (nach 138. Zus.) $\alpha\beta\gamma$ = abc, weil in gleichartigen Gemäßen die Grundtheile gleichvielfache Linien der ersten abgeleiteten Theile sind. Ferner läßt sich (nach 137. Zus. 1., weil or || BC) immer ein Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'\alpha'$ angeben, in welchem $\alpha'\beta'$ = oB, $\alpha'\gamma'$ = rC, $\alpha'\beta'\gamma'$ = ABC und $\alpha'\gamma'\beta'$ = ACB, also auch $\beta'\alpha'\gamma'$ = BAC ist. Demnach ist (siehe 1 und 2.) in diesen beiden aufgestellten Dreiecken $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$ und $\beta\alpha\gamma = \beta'\alpha'\gamma'$; also ist (nach a.) $\alpha\gamma$ in $\alpha'\gamma'$ eben so oft als $\alpha\beta$ in $\alpha'\beta'$ enthalten, und wenn hier ein Rest bleibt, so ist dieß auch dort der Fall, woraus die eben aufgestellte Behauptung hervorgeht, wenn man bedenkt, daß $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ beziehlich die ersten abgeleiteten Theile der Gemäße M, N und $\alpha'\beta'$, $\alpha'\gamma'$ die ersten Reste von AB, AC vorstellen.

c) Der zweite abgeleitete Theil des Gemäßes N ist in dem zweiten Reste von AC eben so oft enthalten als der zweite abgeleitete Theil des Gemäßes M in dem

zweiten Reste von AB, und wenn hier ein dritter Rest bleibt, so bleibt auch dort einer; u. s. f. Hierbei ist nur stets die in b. angestellte Betrachtung zu wiederholen.

d) Aus a. b und c. ergiebt sich nun sogleich nach der für die Gleichheit zweier Maße gegebenen Erklärung, daß AB::M=AC::N.

Zusatz 1. Wenn (Bild 70.) ab und ac die Grundtheile gleichartiger Gemäße M und N vorstellen, und es ist AB::M=AC::N und BAC= bac, so ist ABC= abc und ACB=acb; denn wäre ABC kleiner oder grösser als abc, so ließe sich Bx so ziehen, daß ABx=abc würde, dann wäre Ax kleiner oder größer als AC und doch nach vorstehendem Lehrsatze AB::M=Ax::N, also auch Ax::N=AC::N, welches (nach 37. Zus. 3.) nicht denkbar ist. Ganz so läßt sich auch zeigen, daß ACB weder kleiner noch größer als acb seyn könne.

Zusatz 2. Wenn in den Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) die gleichnamigen Winkel beziehlich gleich sind, und es ist AB:: M=AC::N, wobei M, N irgend gleichartige Gemäße vorstellen, so ist auch ab::M= ac::N; denn stellt man sich ein Dreieck $\alpha\beta\gamma\alpha$ vor, worin $\beta\alpha\gamma$=BAC, $\alpha\beta$ der Grundtheil des Gemäßes M und $\alpha\gamma$ der Grundtheil des Gemäßes N ist, so sind (nach vorstehendem Zusatze) die Winkel dieses Dreiecks den gleichnamigen von ABCA, demnach auch den gleichnamigen von abca beziehlich gleich, folglich ist (nach obigem Lehrsatze) ab::M=ac::N.

Zusatz 3. Wenn in den Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) BAC=bac und sowohl AB::M=AC::N als ab::M=ac::N, wobei M und N irgend gleichartige Gemäße vorstellen, so ist auch ABC=abc und ACB=

acb; denn stellt man sich ein Dreieck $\alpha\beta\gamma\alpha$ vor, worin $\alpha\beta\gamma$ = ABC, also auch $\beta\alpha\gamma$ = bac, $\alpha\beta$ der Grundtheil von M, und $\alpha\gamma$ der Grundtheil von N ist, so sind (nach Zus. 1.) die Winkel $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha\gamma\beta$ sowohl den gleichnamigen von ABCA als denen von abca beziehlich gleich, folglich ist sowohl ABC = abc als ACB = acb.

Zusatz. 4. Wenn A, B, C, D Linien und M, N, gleichartige Gemäße von der Beschaffenheit bezeichnen, daß A : B = C : D und A :: M = C :: N, so ist auch B :: M = D :: N; denn stellt man sich zwei Dreiecke ABCA und abca (Bild 70.) vor, in welchen BAC = bac, AB = A, AC = C, ab = B und ac = D ist, so ist (nach 139. Zus.) sowohl ABC = abc als ACB = acb folglich auch (nach Zus. 2.) B :: M = D :: N.

Zusatz 5. Wenn A, B, C, D Linien und M, N gleichartige Gemäße von der Beschaffenheit bezeichnen, daß A :: M = C :: N und B :: M = D :: N, so ist A : B = C : D; denn stellt man sich zwei Dreiecke ABCA und abca (Bild 70.) vor, in welchem BAC = bac, AB = A, AC = C, ab = B und ac = D ist, so ist (nach Zus. 3.) sowohl ABC = abc als ACB = acb, folglich auch (nach 139. Lehrs.) A : B = C : D.

142. Lehrsatz.

Grundsysteme: 4 Linien A, B, C, D.

Grund:	Folge:
A : B = C : D.	A : C = B : D.

Vorbereit. Das (in 34. Erkl.) gegebene Beweismittel verleitet zu Weitläufigkeiten, welche durch die (in 139. Lehrs. und Zus.) angeführten völlig umgangen werden. Von diesen fordert das eine zu seiner Anwendbarkeit, daß A und C Seiten eines Dreiecks, und eben so B und D Seiten eines

andern Dreiecks werden, deren eingeschlossene Winkel in beiden gleich sind; das andere heischt dasselbe von A und B und von C und D. Dieser gedoppelten Forderung wird Genüge geleistet, wenn man zuerst zwei dem einen Beweismittel angemessene Dreiecke beschreibt, und diese dann so verbindet, wie es das andere Beweismittel verlangt; hierdurch wird man immer zu einer Verbindungsart geleitet, wobei die Linien A und D sowohl als B und C entweder auf oder neben einander liegen. Beide Verbindungsarten führen zum Ziele; letztere zieht jedoch die einfachsten Betrachtungen nach sich und giebt folgende Beweisart an die Hand:

Seyen BE und CD (Bild 71.) zwei gerade in A sich schneidende Linien. Macht man nun AB = A, AC = C, AD = B und AE = D, und zieht die Linien BC, DE, BD und CE, so erhellet aus dem Grunde (nach 139. Zus., weil BAC = DAE ist), daß ACB = AED und ABC = ADE. Zur weitern Ableitung aus diesen Beweisfolgen und zur Auffindung der für das Begründungsmittel erforderlichen Beweisgründe dienen die (in 82. Zus. 10. und 12.) vorhandenen Beweismittel. Beschreibt man, ihnen gemäß, (nach 119. Zug. 2.) um eines der Dreiecke BDCB, BDEB, CBEC, CDEC eine Kreislinie, z. B. BDCB, so liegt (nach 82. Zus. 12.) auch E in ihr; demnach ist (nach 82. Zus. 10.) AEC = ADB und ACE = ABD, woraus sich (nach 139. Lehrs., weil BAD = CAE ist) die zu erweisende Folge ergiebt.

Zusatz 1. Wenn A, B, C, D Linien und M, N gleichartige Gemäße von der Beschaffenheit bezeichnen, daß A : B = C : D und A : : M = B : : N ist, so ist auch C : : M = D : : N. (siehe 140. Zus. 4.)

Zusatz 2. Wenn A, B, C, D Linien und M, N gleichartige Gemäße von der Beschaffenheit bezeichnen, daß A :: M = B :: N und C :: M = D :: N, so ist auch A : B = C : D. (siehe 140. Zus. 5.)

Zusatz 3. Wenn a, b, c sowohl als A, B, C Linien von der Beschaffenheit bezeichnen, daß a : b = A : B und b : c = B : C, so ist auch a : c = A : C; denn es ist hier nach obigem Lehrsatze sowohl a : A = b : B als b : B = c : C, demnach a : A = c : C, weil beide Verhältnisse dem dritten b : B gleich sind, und also nach obigem Lehrsatze auch a : c = A : C.

143. So wie sich die letzten hier aufgestellten Sätze, welche blos Liniensysteme betrachten und daher in die Longimetrie gehören, hier weit leichter als dort beweisen lassen, so ist dieß bei allen andern, welche die Verhältnisse und Maße der Linien abhandeln, der Fall. Um den Leser in den Stand zu setzen, sich an solchen Sätzen zu üben und zu bilden, werden hier einige der allgemeinsten Resultate kurz hingestellt; ihr Beweis aber, zu dem man auf eine ähnliche Weise, wie in §. 3. geschehen ist, durch allmählige Erweiterung gelangt, wird gänzlich weggelassen. Dabei bezeichnen A, B, C u. s. f. sowohl als a, b, c, u. s. f. immer gerade Linien.

a) Wenn die Verhältnisse A : a, B : b, C : c, u. s. f. alle unter einander gleich sind, so verhalten sich irgend zwei Vorderglieder derselben zu einander, wie ihre gleichnamigen Hinterglieder. Dieß wird kurz so bezeichnet: Es ist A : B : C.... = a : b : c....

b) Wenn A : B : C.... = a : b : c.... und irgend eine der Linien A, B, C, u. s. f. nach dem

Gemäße M gemessen das gleiche Maß giebt als die gleichnamige unter den Linien a, b, c, u. s. f. nach dem gleichartigen Gemäße m gemessen, so geschieht dieß auch bei jeden zwei andern solchen gleichnamigen Linien. Wenn z. B. B::M=b::m, so ist auch A::M=a::m und C::M=c::m, u. s. f.

c) Wenn jede der Linien A, B, C, u. s. f. nach dem Gemäße M gemessen das gleiche Maß giebt als ihre gleichnamige unter den Linien a, b, c, u. s. f. nach dem gleichartigen Gemäße m gemessen, so ist: A:B:C....=a:b:c....

d) Wenn A:B:C....=a:b:c.... so verhalten sich zwei aus den Linien A, B, C, u. s. f. auf irgend eine Weise durch Hervorbringung von Vielfachen, vielten Theilen, Summen und Unterschieden neu entsprungene Linien zueinander, wie die aus den gleichnamigen a, b, c, u. s. f. auf dieselbe Weise gebildeten Linien. So z. B. ist f. A:g. B= f. a:g. b, oder auch f. A+g. B: p. B—q. C= f. a+g. b: p. b—q. c, wobei f. A und f. a, oder g. B und g. b, oder p. B und p. b, oder q. C und q. c Gleichvielfache der Linien A und a, B und b, C und c bezeichnen.

e) Wenn jede der Linien A, B, C, u. s. f. nach dem Gemäße M gemessen das gleiche Maß giebt als ihre gleichnamige unter den Linien a, b, c, u. s. f. nach dem gleichartigen Gemäße m gemessen, so giebt eine aus A, B, C, u. s. f. auf irgend eine Weise durch Hervorbringung von Vielfachen, vielten Theilen, Summen und Unterschieden neu

entsprungene Linie, nach M gemessen, mit der aus a, b, c, u. s. f. auf dieselbe Weise gebildeten, nach m gemessen, gleiches Maß. Es ist z. B. pA::M = pa::m, oder auch p. A — q. B::M = p. a — q. b::m, wobei p. A und p. a, q. B und q. b Gleichvielfache der Linien A und a, B und b vorstellen.

f) Wenn A:B:C.... = a:b:c.... und es findet zwischen zwei aus den Linien A, B, C, u. s. f. auf irgend eine Weise durch Hervorbringung von Vielfachen, vielten Theilen, Summen und Unterschieden neu entstandenen Linien, oder zwischen ihren nach gleichartigen Gemäßen gefundenen Maßen, oder zwischen zwei aus solchen Linien hervorgegangenen Verhältnissen irgend eine Gleichheit oder Ungleichheit Statt, so geschieht dieß auch bei den aus den Linien a, b, c, u. s. f. auf dieselbe Weise entsprungenen Ausdrücken. Wenn z. B. A + B = 2C, so ist auch a + b = 2c; oder wenn A + B::M > B — C::N, so ist auch a + b::M > b — c::N, wobei M, N gleichartige Gemäße bezeichnen; oder wenn A:B = p.B:q.C, so ist auch a:b = p. b:q.c, wobei p. B und p. b, q. C und q. c Gleichvielfache der Linien B und b, C und c vorstellen.

144. Lehrsatz.

Grundsysteme:	Bild 70.
Gründe:	Folgen:
1) AB::M = ab::m.	1) ACB = acb.
2) ABC = abc.	2) AC::M = ac::m.
3) BAC = bac.	3) BC::M = bc::m.

Vorbereit. Aus den zwei letzten Gründen ergiebt sich sogleich die erste Folge; daher hat man (nach 140. Lehrs.) sowohl AB:ab = AC:ac als AB:ab = BC:bc. Da nun (aus Grund 1.) AB::M = ab::m, wobei M, m gleichartige Gemäße vorstellen, so ist (nach 142. Zus. 1.) sowohl AC::M = ac::m als BC::M = bc::m.

Zusatz 1. Wenn in den Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ABC = abc und BAC = bac, so ist ACB = acb und sowohl AB:AC = ab:ac und AB:BC ab:bc als AB:ab = AC:ac und AB:ab = BC:bc; denn stellt man sich zwei gleichartige Gemäße M und m vor, deren Grundtheile beziehlich AB und ab sind, so ist offenbar AB::M = ab::m, und nun nach obigem Lehrsatze nicht nur ACB = acb, sondern auch AC::M = ac::m und BC::M = bc::m, woraus sich (nach 141. Zus. 5. und 142. Zus. 2.) die hier aufgestellten Behauptungen ergeben.

Zusatz 2. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ABC = abc, BAC = bac, ferner AB = p.R, ab = q.R und AC = p.S ist, so ist auch ac = q.S, wobei R, S irgend gerade Linien, und p.R und p.S, q.R und q.S beliebige Gleichvielfache derselben bezeichnen. Denn es ist (nach Zus. 1.) in den fraglichen Dreiecken AB:ab = AC:ac; stellt man sich daher zwei gleichartige Gemäße M und N vor, deren Grundtheile beziehlich R und S sind, so daß also AB::M = AC::N ist, so ist auch (nach 141. Zus. 4) ab::M = ac::N und folglich ac = q.S, weil ab = q.R ist.

Zusatz 3. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ABC = abc, BAC = bac, ferner AB = p.R, AC = q.R und ab = p.S ist, so ist auch ac = q.S, wobei R, S irgend gerade Linien und p.R und

p.S, q.R und q.S beliebige Gleichvielfache derselben bezeichnen. Denn stellt man sich zwei gleichartige Gemäße M und m vor, deren Grundtheile beziehlich R und S sind, so daß also AB::M=ab::m ist, so ist auch nach obigem Lehrsatze AC::M=ac::m, und folglich ac=q.S, weil AC=q.R ist.

Zusatz 4. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ABC=abc, BAC=bac, ferner AB=p.ab ist, so ist auch AC=p.ac, wobei p.ab, p.ac beliebige Gleichvielfache von ab, ac bezeichnen. Es ist dieß nur ein besonderer Fall von Zusatz 2.

Zusatz 5. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ABC=abc, BAC=bac, ferner AB=p.AC ist, so ist auch ab=p.ac, wobei p.AC, p.ac beliebige Gleichvielfache von AC, ac bezeichnen. Es ist dieß nur ein besonderer Fall von Zusatz 3.

Zusatz 6. Wenn sich zwei Sehnen AB und CD (Bild 72. oder 73.) in einem Punkte E schneiden, es mag dieß diesseits der Kreislinie (wie in Bild 72.), oder jenseits der Kreislinie geschehen (wie in Bild 73., wobei die Sehnen verlängert seyn müssen), so ist AE:CE=DE:BE und AE:DE=CE:BE; denn zieht man AC und BD, so entstehen zwei Dreiecke EACE und EBDE, denen die in Zus. 1. angegebenen Merkmale zukommen, wie sich mittelst 82. Zus. 10. leicht zeigen läßt.

Zusatz 7. Wenn (Bild 72.) AB durch den Mittelpunkt des Kreises geht, also Durchmesser wird, und senkrecht auf CD steht, so ist CE=DE (nach 90. Zus. 2.); es ist daher in diesem Falle AE:CE=CE:BE oder AE:DE=DE:BE (nach Zus. 6.).

Zusatz 8. Wenn eine Tangente AC (Bild. 74.), deren Berührungspunkt C ist, von einer Sehne BD jenseits der Kreislinie in A geschnitten wird, so ist AD:AC=AC:AB; denn zieht man BC und CD, so entstehen zwei Dreiecke ABCA und ACDA, denen die in Zus. 1. angegebenen Merkmale zukommen, wie sich mittelst 85. Zus. 9. leicht zeigen läßt.

145. Vorhergehender Lehrsatz geht mit dem in 87. aufgestellten Hand in Hand; beide unterscheiden sich blos dadurch von einander, daß, wo dort Seiten des Dreiecks ABCA vorkommen, hier ihre Maße, nach M gemessen, und, wo dort Seiten des Dreiecks abca vorkommen, hier ihre Maße, nach m gemessen, in den Gründen sowohl als in den Folgen des Lehrsatzes stehen, wobei M und m irgend gleichartige Gemäße vorstellen. Es steht aber jedem der (in §. 7. und §. 8.) angeführten Lehrsätze hier einer zur Seite, der von jenem blos in den berührten Punkten abweichet, was sich allgemein so ausdrücken läßt:

Wenn die Gründe eines der in §. 7 und §. 8. an den Dreiecken ABCA und abca dargestellten Lehrsätze auf die gleichnamigen Stücke zweier andern Dreiecke A'B'C'A' und a'b'c'a' bezogen mit der Einschränkung Statt finden, daß, wo dort Seiten der Dreiecke ABCA und abca vorkommen, hier die Maße der gleichnamigen Seiten der Dreiecke A'B'C'A' und a'b'c'a', beziehlich nach den gleichartigen Gemäßen M und m gemessen, stehen: so finden auch die Folgen des in Frage stehenden an den Dreiecken ABCA und abca dargestellten Lehrsatzes auf die gleichnamigen Stücke der Drei-

ecke A'B'C'A' und a'b'c'a' bezogen, mit der hier gemachten Einschränkung Statt.

Von der Wahrheit dieser allgemeinen Behauptung kann man sich auf folgende Weise überzeugen:

a) Man stelle sich ein vermittelndes Dreieck $\alpha\beta\gamma\alpha$ vor, dessen Winkel den gleichnamigen des Dreiecks A'B'C'A' beziehlich gleich sind, und dessen Seiten, nach m gemessen, mit den gleichnamigen Seiten in A'B'C'A', nach M gemessen, gleiches Maß geben, so daß also $\beta\alpha\gamma = B'A'C'$, $\alpha\beta\gamma = A'B'C'$ und $\alpha\gamma\beta = A'C'B'$, ferner $\alpha\beta :: m = A'B' :: M$, $\alpha\gamma :: m = A'C' :: M$ und $\beta\gamma :: m = B'C' :: M$ ist. Die Möglichkeit dieses vermittelnden Dreiecks läßt sich aus vorhergehendem Lehrsatze einsehen, nach welchem das Dreieck $\alpha\beta\gamma\alpha$ von der verlangten Beschaffenheit ist, sobald $\alpha\beta :: m = A'B' :: M$, $\beta\alpha\gamma = B'A'C'$ und $\alpha\beta\gamma = A'B'C'$ ist.

b) Finden nun die Gründe eines der erwähnten an den Dreiecken ABCA und abca dargestellten Lehrsätze auf die gleichnamigen Stücke der Dreiecke A'B'C'A' und a'b'c'a' bezogen, mit der vorhin gemachten Einschränkung Statt, so finden sie auf die gleichnamigen Stücke der Dreiecke $\alpha\beta\gamma\alpha$ und a'b'c'a' bezogen ohne diese Einschränkung Statt. Denn enthält einer von diesen Gründen blos Winkel, so kann, wie sich aus a. ergiebt, statt des zu A'B'C'A' gehörigen, der gleichnamige in $\alpha\beta\gamma\alpha$ gesetzt werden; und sind in einem von diesen Gründen Linien enthalten, so kann,

wie sich ebenfalls aus a. ergiebt, das Maß der zu $A'B'C'A'$ gehörigen Linie, nach M gemessen, mit dem Maße der gleichnamigen in $\alpha\beta\gamma\alpha$, nach m gemessen, verwechselt werden, und nun können, weil sich alle Maße auf das nämliche Gemäße m beziehen, (nach 37. Zus. 8 und 9.) statt der Maße die Linien selbst gesetzt werden. Käme z. B. den Dreiecken ABCA und abca der Grund ABC = abc oder ABC > abc zu, welcher sich in den Dreiecken $A'B'C'A'$ und $a'b'c'a'$ in $A'B'C' = a'b'c'$ oder $A'B'C' > a'b'c'$ verwandelte, so wäre in den Dreiecken $\alpha\beta\gamma\alpha$ und $a'b'c'a'$ $\alpha\beta\gamma = a'b'c'$ oder $\alpha\beta\gamma > a'b'c'$, weil (nach a.) $\alpha\beta\gamma = A'B'C'$; oder käme den Dreiecken ABCA und abca der Grund AB = ab oder AB > ab zu, welcher sich in den Dreiecken $A'B'C'A'$ und $a'b'c'a'$ in $A'B'::M = a'b'::m$ oder $A'B'::M > a'b'::m$ verwandelte, so wäre, weil (nach a.) $\alpha\beta::m = A'B'::M$, in den Dreiecken $\alpha\beta\gamma\alpha$ und $a'b'c'a'$ $\alpha\beta::m = a'b'::m$ oder $\alpha\beta::m > ab::m$ und nun auch $\alpha\beta = a'b'$ oder $\alpha\beta > a'b'$ (nach 37. Zus. 8. oder 9.)

c) Finden hingegen die Folgen eines der erwähnten an den Dreiecken ABCA und abca dargestellten Lehrsätze auf die gleichnamigen Stücke der Dreiecke $\alpha\beta\gamma\alpha$ und $a'b'c'a'$ bezogen ohne eine solche Einschränkung Statt, so finden sie auf die gleichnamigen Stücke der Dreiecke $A'B'C'A'$ und $a'b'c'a'$ bezogen mit jener Einschränkung Statt. Denn enthält eine von diesen Folgen blos Winkel, so kann, wie sich aus a. ergiebt, statt des zu $\alpha\beta\gamma\alpha$ gehörigen der gleichna-

mige in $A'B'C'A'$ gesetzt werden; und sind in einer von diesen Folgen Linien enthalten, so können (nach 37. Zus. 2 und 3) statt dieser Linien ihre zu einem und demselben Gemäße m gehörigen Maße gesetzt werden, und nun kann, wie sich ebenfalls aus a. ergiebt, das Maß der zu $\alpha\beta\gamma\alpha$ gehörigen Linie, nach m gemessen, mit dem Maße der gleichnamigen in $A'B'C'A'$, nach M gemessen, verwechselt werden. Käme z. B. den Dreiecken ABCA und abca die Folge $ACB = acb$ oder $ACB < acb$ zu, und wäre hiernach in den Dreiecken $\alpha\beta\gamma\alpha$ und $a'b'c'a'$ $\alpha\gamma\beta = a'c'b'$ oder $\alpha\gamma\beta < a'c'b'$, so wäre, weil (nach a.) $\alpha\gamma\beta = A'C'B'$ in den Dreiecken $A'B'C'A'$ und $a'b'c'a'$ $A'C'B' = a'c'b'$ oder $A'C'B' < a'c'b'$; oder käme den Dreiecken ABCA und abca die Folge $BC = bc$ oder $BC < bc$ zu, und wäre hiernach in den Dreiecken $\alpha\beta\gamma\alpha$ und $a'b'c'a'$ $\beta\gamma = bc$ oder $\beta\gamma < b'c'$, so wäre in diesen Dreiecken auch (nach 37. Zus. 2 oder 3.) $\beta\gamma :: m = b'c' :: m$ oder $\beta\gamma :: m < b'c' :: m$, und nun auch, weil nach a. $\beta\gamma :: m = B'C' :: M$, in den Dreiecken $A'B'C'A'$ und $a'b'c'a'$ $B'C' :: M = b'c' :: m$ oder $B'C' :: M < b'c' :: m$.

d) Wenn folglich die Gründe eines der erwähnten an den Dreiecken ABCA und abca dargestellten Lehrsätze auf die gleichnamigen Stücke der Dreiecke $A'B'C'A'$ und $a'b'c'a'$ bezogen mit der vorhin gemachten Einschränkung Statt finden, so finden sie (nach b.) auf die gleichnamigen Stücke der Dreiecke $\alpha\beta\gamma\alpha$ und $a'b'c'a'$ bezogen ohne jene Einschränkung Statt, mithin finden auch die

Folgen dieses Lehrsatzes (nach diesem Lehrsatze selbst) auf die gleichnamigen Stücke der Dreiecke $\alpha\beta\gamma\alpha$ und a′b′c′a′ bezogen ohne jene Einschränkung Statt, daher finden (nach c.) dieselben Folgen auf die gleichnamigen Stücke der Dreiecke A′B′C′A′ und a′b′c′a′ bezogen mit jener Einschränkung Statt. Wäre z. B. in den Dreiecken A′B′C′A′ und a′b′c′a′ sowohl A′B′::M = a′b′::m als A′C′::M = a′c′::m und B′A′C′ = b′a′c′, welches die Gründe des in 89. stehenden Lehrsatzes mit der vorhin gemachten Einschränkung sind, so wäre (nach b.) in den Dreiecken $\alpha\beta\gamma\alpha$ und a′b′c′a′ sowohl $\alpha\beta$ = a′b′ als $\alpha\gamma$ = a′c′ und $\beta\alpha\gamma$ = b′a′c′, mithin wäre (nach 89. Lehrs.) in denselben Dreiecken sowohl $\alpha\beta\gamma$ = a′b′c′ und $\beta\gamma$ = b′c′, daher (nach c.) in den Dreiecken A′B′C′A′ und a′b′c′a′ sowohl A′B′C′ = a′b′c′ als A′C′B′ = a′c′b′ und B′C′::M = b′c′::m, welches die Folgen des in 89. stehenden Lehrsatzes mit der vorhin gemachten Einschränkung sind.

Durch den hier ausgesprochenen und erwiesenen allgemeinen Satz wird die Lehre von den Vielfachen, Verhältnissen und Maßen der Linien in verschiedenen Dreiecken eng an die Lehre von der Gleichheit und Ungleichheit solcher Linien gekettet, so daß diese mit jener in der Verbindung von Grund zu Folge erscheint. Es hält nicht schwer diese Verwandtschaft auch auf die in §. 9. vorkommenden Sätze auszudehnen, was jedoch hier der Kürze halber nicht geschieht. Der Zweck dieser Schrift fordert nur noch die Aufstellung der aus den in §. 7. vorhandenen auf die angeführte Weise entspringenden Lehrsätze, an denen Anfänger den hier aufgestellten allgemeinen Beweis im besondern darstellen können.

146. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 70.

Gründe:	Folgen:
1) AB::M=ab::m.	1) AC::M=ac::m.
2) BAC =bac.	2) BC::M=bc::m.
3) ACB =acb.	3) ABC=abc.

Zusatz 1. Wenn in den Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) BAC=bac und ACB=acb ist, so ist ABC=abc und sowohl AC:AB=ac:ab und BC:AB=bc:ab als AC:ac=AB:ab und BC:bc =AB:ab; denn stellt man sich zwei gleichartige Gemäße M uud m vor, deren Grundtheile beziehlich AB und ab sind, so ist offenbar AB::M=ab::m und nun nach obigem Lehrsatze sowohl AC::M=ac::m als BC::M= bc::m, woraus sich sogleich (nach 141. Zus. 5. und 142. Zus. 2.) die hier aufgestellten Behauptungen ergeben.

Zusatz 2. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) BAC=bac, ACB=acb, ferner AB=p. R, ab=q. R und BC=p. S ist, so ist auch bc=q. S, wobei R, S irgend gerade Linien, und p. R und p. S, q. R, und q. S beliebige Gleichvielfache derselben bezeichnen. Denn es ist (nach Zus. 1.) in den fraglichen Dreiecken AB:ab=BC:bc; stellt man sich daher zwei gleichartige Gemäße M und N vor, deren Grundtheile beziehlich R und S sind, so daß also AB::M=BC::N ist, so ist auch (nach 141. Zus. 4.) ab::M=bc::N, folglich bc= q. S, weil ab=q. R ist.

Zusatz 3. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) BAC=bac, ACB=acb, ferner AB=p. R BC=q. R und ab=p. S ist, so ist auch bc=q. S, wobei R, S irgend gerade Linien, und p. R und p. S, q. R

und q. S beliebige Gleichvielfache derselben bezeichnen. Denn stellt man sich zwei gleichartige Gemäße M und m vor, deren Grundtheile beziehlich R und S sind, so daß also AB::M=ab::m ist, so ist auch nach obigem Lehrsatze BC::M=bc::m, folglich bc=q.S, weil BC=q.R ist.

Zusatz 4. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) BAC=bac, ACB=acb und AB=p.ab ist, so ist auch BC=p.bc, wobei p.ab, p. bc beliebige Gleichvielfache von ab, bc bezeichnen. Es ist dieß ein besonderer Fall von Zusatz 2.

Zusatz 5. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) BAC=bac, ACB=acb und AB=p.BC ist, so ist auch ab=p.bc, wobei p.BC, p.bc beliebige Gleichvielfache von BC, bc bezeichnen. Es ist dieß nur ein besonderer Fall von Zusatz 3.

147. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 70.

Gründe:	Folge:
1) AB::M=ab::m.	1) BC::M=bc::m.
2) AC::M=ac::m.	2) ACB=acb.
3) BAC=bac.	3) ABC=abc.

Zusatz 1. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) BAC=bac und entweder AB:ab=AC:ac oder AB:AC=ab:ac, so ist ABC=abc, ACB=acb und sowohl AB:ab=BC:bc als AB:BC=ab:bc; denn stellt man sich zwei gleichartige Gemäße M und m vor, deren Grundtheile beziehlich AB und ab sind, so daß also AB::M=ab::m und daher auch (nach 141. Zus. 4. oder 142. Zus. 1.) AC::M=ac::m ist, so ist nach obigem Lehrsatze ACB=acb und ABC=abc,

ferner BC::M = bc::m, mithin (nach 141. Zus. 5. und 142. Zus. 2.) sowohl AB:ab = BC:bc als AB:BC = ab:bc.

Zusatz 2. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) BAC = bac, AB = p.R, ab = q.R, AC = p.S und ac = q.S ist, so ist allemal ACB = acb und ABC = abc, aber bc = q.T unter der Voraussetzung, daß BC = p.T, wobei R, S, T irgend gerade Linien und p.R, p.S, p.T sowohl als q.R, q.S, q.T beliebige Gleichvielfache derselben bezeichnen. Denn stellen M und N gleichartige Gemäße vor, deren Grundtheile beziehlich R und S sind, so daß also AB::M = AC::N und ab::M = ac::N, so ist (nach 142. Zus. 2.) AB:AC = ab:ac, daher (nach Zus. 1.) ABC = abc und ACB = acb, folglich (nach 144. Zus. 2.) bc = q.T, wenn BC = p.T ist.

Zusatz 3. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) BAC = bac, AB = p.R, AC = q.R, ab = p.S und ac = q.S ist, so ist allemal ABC = abc und ACB = acb, aber bc = r.S unter der Voraussetzung, daß BC = r.R, wobei R, S irgend gerade Linien und sowohl p.R, p.S als q.R, q.S und r.R, r.S beliebige Gleichvielfache derselben bezeichnen. Denn stellen M und m gleichartige Gemäße vor, deren Grundtheile beziehlich R und S sind, so daß also AB::M = ab::m und AC::M = ac::m, so ist nach obigem Lehrsatze ABC = abc und ACB = acb, ferner BC::M = bc::m, mithin bc = r.S, wenn BC = r.R ist.

Zusatz 4. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) BAC = bac, AB = p.ab und AC = p.ac ist, so ist auch ABC = abc, ACB = acb und BC = p.bc, wobei p.ab, p.ac und p.bc beliebige

Gleichvielfache von ab, ac und bc bezeichnen. Es ist dieß nur ein besonderer Fall von Zusatz 2.

Zusatz 5. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) BAC = bac, AB = p. AC und ab = p. ac ist, so ist auch ABC = abc und ACB = acb, wobei p. AC, p. ac beliebige Gleichvielfache von AC, ac bezeichnen. Es ist dieß nur ein besonderer Fall von Zusatz 3.

148. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 70.

Gründe:	Folgen:
1) AB : : M = ab : : m.	1) BC : : M = bc : : m.
2) AC : : M = ac : : m.	2) ABC = abc.
3) ACB = acb.	3) BAC = bac.
4) {entweder ABC + abc > P. / oder ABC + abc < P.	

Zusatz 1. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ACB = acb, und entweder AB : ab = AC : ac oder AB : AC = ab : ac und überdieß ABC + abc entweder kleiner oder größer als ein flacher Winkel ist, so ist BAC = bac, ABC = abc und nicht nur AB : ab = BC : bc und AB : BC = ab : bc, sondern auch AC : ac = BC : bc und AC : BC = ac : bc; denn stellt man sich zwei gleichartige Gemäße M und m vor, deren Grundtheile beziehlich AB und ab sind, so daß also AB : : M = ab : : m und daher auch (nach 141. Zus. 4. oder 142. Zus. 1.) AC : : M = ac : : m ist, so ist nach obigem Lehrsatze BAC = bac und ABC = abc, ferner BC : : M = bc : : m, folglich (nach 141. Zus. 5. und 142. Zus. 2.) sowohl AB : ab = BC : bc als AB : BC = ab : bc, und mithin auch AC : ac = BC : bc und AC : BC = ac : bc.

Zusatz 2. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ACB = acb, AB = p. R, ab = q. R, AC = p. S, ac = q. S, überdieß ABC + abc größer oder kleiner als ein flacher Winkel ist, so ist allemal BAC = bac, und ABC = abc, aber bc = q. T unter der Voraussetzung, daß BC = p. T ist, wobei R, S, T irgend gerade Linien und p. R, p. S, p. T sowohl als q. R, q. S, q. T beliebige Gleichvielfache derselben bezeichnen. Denn stellen M und N gleichartige Gemäße vor, deren Grundtheile beziehlich R und S sind, so daß also AB : : M = AC : : N und ab : : M = ac : : N, so ist daher (nach 142. Zus. 2.) AB : AC = ab : ac, also (nach Zus. 1.) BAC = bac und ABC = abc folglich (nach 144. Zus. 2.) bc = q. T, wenn BC = p. T ist.

Zusatz 3. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ACB = acb, AB = p. R, AC = q. R, ab = p. S und ac = q. S, überdieß ABC + abc größer oder kleiner als ein flacher Winkel ist, so ist allemal BAC = bac und ABC = abc, aber bc = r. S unter der Voraussetzung, daß BC = r. R ist, wobei R, S irgend gerade Linien und sowohl p. R, p. S als q. R, q. S und r. R, r. S beliebige Gleichvielfache derselben bezeichnen. Denn stellen M und m gleichartige Gemäße vor, deren Grundtheile beziehlich R und S sind, so daß also AB : : M = ab : : m und AC : : M = ac : : m, so ist nach obigem Lehrsatze BAC = bac und ABC = abc, ferner BC : : M = bc : : m, mithin bc = r. S wenn BC = r. R ist.

Zusatz 4. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ACB = acb, AB = p. ab und AC = p. ac überdieß ABC + abc größer oder kleiner als ein flacher Winkel ist, so ist auch BAC = bac, ABC = abc und BC = p. bc, wobei p. ab, p. ac und p. bc beliebige

Gleichvielfache von ab, ac und bc bezeichnen. Es ist dieß ein besonderer Fall von Zus. 2.

Zusatz 5. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ACB = acb, AB = p. AC und ab = p. ac, überdieß ABC + abc größer oder kleiner als ein flacher Winkel ist, so ist auch BAC = bac und ABC = abc, wobei p. AC und p. ac beliebige Gleichvielfache von AC und ac bezeichnen. Es ist dieß nur ein besonderer Fall von Zus. 3.

149. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 70.

Gründe:	Folgen:
1) AB :: M = ab :: m.	1) BAC = bac.
2) AC :: M = ac :: m.	2) ABC = abc.
3) BC :: M = bc :: m.	3) ACB = acb.

Zusatz 1. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) AB : ab = AC : ac oder AB : AC = ab : ac und AB : ab = BC : bc oder AB : BC = ab : bc ist, so ist auch BAC = bac, ABC = abc und ACB = acb; denn stellt man sich zwei gleichartige Gemäße M und m vor, deren Grundtheile beziehlich AB und ab sind, so daß also AB :: M = ab :: m und daher auch (nach 141. Zus. 4. oder 142. Zus. 1.) AC :: M = ac :: m und BC :: M = bc :: m ist, so erhellet nach obigem Lehrsatze, daß BAC = bac, ABC = abc und ACB = acb ist.

Zusatz 2. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) AB = p. R, ab = q. R, AC = p. S, ac = q. S, BC = p. T und bc = q. T ist, so sind die gleichnamigen Winkel in beiden Dreiecken beziehlich gleich; hierbei bezeichnen R, S, T irgend gerade Linien und p. R, p. S und p. T sowohl als q. R, q. S und q. T be-

liebige Gleichvielfache derselben. Denn stellen M, N und O gleichartige Gemäße vor, deren Grundtheile beziehlich R, S und T sind, so daß also AB::M=AC::N und ab::M=ac::N, ferner AB::M=BC::O und ab::M=bc::O, so erhellet (nach 142. Zus. 2.), daß sowohl AB:AC=ab:ac als AB:BC=ab:bc, woraus (nach Zus. 1.) die hier aufgestellte Behauptung hervorgeht.

Zusatz 3. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ACB=acb, AB=p.R, ab=p.S, AC=q.R, ac=q.S, BC=r.R und bc=r.S ist, so sind die gleichnamigen Winkel in beiden Dreiecken beziehlich gleich; hierbei bezeichnen R, S irgend gerade Linien, und sowohl p.R, p.S als q.R, q.S und r.R, r.S beliebige Gleichvielfache derselben. Denn stellen M und m gleichartige Gemäße vor, deren Grundtheile beziehlich R und S sind, so ist offenbar AB::M=ab::m, und BC::M=bc::M, woraus nach obigem Lehrsatze die hier aufgestellte Behauptung hervorgeht.

Zusatz 4. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) AB=p.ab, AC=p.ac und BC=p.bc ist, wobei p.ab, p.ac und p.bc beliebige Gleichvielfache der Seiten ab, ac und bc bezeichnen, so sind die gleichnamigen Winkel in beiden Dreiecken beziehlich gleich. Es ist dieß nur ein besonderer Fall von Zus. 2.

150. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 70.

Grund:	Folge:
1) AB::M=ab::m.	ACB=acb.
2) AC::M=ac::m.	
3) ABC+abc=P.	

Zusatz 1. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) AB : ab = AC : ac oder AB : AC = ab : ac und ABC + abc = P ist, so ist auch ACB = acb; denn stellt man sich zwei gleichartige Gemäße M und m vor, deren Grundtheile beziehlich AB und ab sind, so daß also AB : : M = ab : : m und daher auch (nach 141. Zus. 4. oder 142. Zus. 1.) AC : : M = ac : : m ist, so erhellet nach obigem Lehrsatze, daß ACB = acb ist.

Zusatz 2. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) AB = p. R, ab = q. R, AC = p. S und ac = q. S, überdieß ABC + abc = P ist, wobei R, S irgend gerade Linien und sowohl p. R, p. S, als q. R, q. S beliebige Gleichvielfache derselben bezeichnen, so ist ACB = acb. Denn stellen M und N gleichartige Gemäße vor, deren Grundtheile beziehlich R und S sind, so daß also AB : : M = AC : : N und ab : : M = ac : : N und daher auch (nach 142. Zus. 2.) AB : AC = ab : ac ist, so erhellet (nach Zus. 1.) daß ACB = acb.

Zusatz 3. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) AB = p. R, ab = p. S, AC = q. R und ac = q. S, überdieß ABC + abc = P ist, wobei R, S irgend gerade Linien und sowohl p. R, p. S als q. R, q. S beliebige Gleichvielfache derselben bezeichnen, so ist ACB = acb. Denn stellen M und m gleichartige Gemäße vor, deren Grundtheile beziehlich R und S sind, so daß also AB : : M = ab : : m, und AC : : M = ac : : m ist, so erhellet nach obigem Lehrsatze, daß ACB = acb.

Zusatz 5. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) AB = p. ab, AC = p. ac und ABC + abc = P ist, wobei p. ab und p. ac beliebige Gleichvielfache von ab und ac bezeichnen, so ist ACB = acb. Es ist dieß nur ein besonderer Fall von Zus. 2.

Zusatz 5. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) AB = p. AC, ab = p. ac und ABC + abc = P ist, wobei p. AC, p. ac beliebige Gleichvielfache von AC und ac bezeichnen, so ist ACB = acb. Es ist dieß nur ein besonderer Fall von Zusatz 3.

Zusatz 6. Wenn in einem Dreiecke ABCA (Bild 34.) CD so gezogen ist, daß AD : BD = AC : BC oder AD : AC = BD : BC ist, so ist ACB in CD halbirt. Es ist dieß eine besondere Anwendung von Zus. 1.

151. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 70.

Gründe:	Folge:
1) AB : : M = ab : : m.	AC : : M = ac : : m.
2) ACB = acb.	
3) ABC + abc = P.	

Zusatz 1. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ACB = acb und ABC + abc = P ist, so ist sowohl AB : ab = AC : ac als AB : AC = ab : ac; denn stellt man sich zwei gleichartige Gemäße M und m vor, deren Grundtheile beziehlich AB und ab sind, so daß also AB : : M = ab : : m ist, so hat man nach obigem Lehrsatze auch AC : : M = ac : : m, folglich ist (nach 141. Zus. 5. und 142. Zus. 2.) AB : ab = AC : ac und AB : AC = ab : ac.

Zusatz 2. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ACB = acb und ABC + abc = P, ferner AB = p. R, ab = q. R und AC = p. S ist, so ist auch ac = q. S, wobei R, S irgend gerade Linien und p. R, p. S sowohl als q. R, q. S beliebige Gleichvielfache derselben bezeichnen. Denn stellt man sich zwei gleichartige Gemäße M und N vor, deren Grundtheile bezieh-

lich R und S sind, so daß also AB::M=AC::N ist, so ist auch (nach 141. Zus. 4.) ab::M=ac::N, weil (nach Zus. 1.) AB:ab=AC:ac ist; da nun ab=q.R ist, so ist ac=q.S.

Zusatz 3. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ACB=acb und ABC+abc=P, ferner AB=p.R, AC=q.R und ab=p.S ist, so ist auch ac=q.S, wobei R, S irgend gerade Linien und p.R, p.S sowohl als q.R, q.S beliebige Gleichvielfache derselben bezeichnen. Denn stellt man sich zwei gleichartige Gemäße M und m vor, deren Grundtheile beziehlich R und S sind, so daß also AB::M=ab::m ist, so erhält man nach obigem Lehrsatze AC::M=ac::m, folglich ist ac=q.S, weil AC=q.R ist.

Zusatz 4. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ACB=acb und ABC+abc=P, ferner AB=p.ab ist, so ist auch AC=p.ac, wobei p.ab und p.ac beliebige Gleichvielfache von ab und ac bezeichnen. Es ist dieß ein besonderer Fall von Zusatz 2.

Zusatz 5. Wenn in zwei Dreiecken ABCA und abca (Bild 70.) ACB=acb und ABC+abc=P, ferner AB=p.AC, so ist auch ab=p.ac, wobei p.AC und p.ac beliebige Gleichvielfache von AC und ac bezeichnen. Es ist dieß nur ein besonderer Fall von Zusatz 3.

Zusatz 6. Wenn in einem Dreiecke ABCA (Bild 34.) CD so gezogen wird, daß sie den Winkel ACB halbirt, so ist AD:BD=AC:BC und AD:AC=BD:BC. Es ist dieß eine besondere Anwendung von Zusatz 1.

Zusatz 7. Wenn in einem Dreiecke ABCA (Bild 34.), in welchem ACB stumpf ist, CD so gezogen wird, daß BCD=ABC+BAC ist, so ist AC:AB=CD:BD und AC:CD=AB:BD. Auch dieß ist eine besondere Anwendung von Zusatz 1.; in den Dreiecken ABCA und

BCDB ist nämlich ACB + BCD = P, weil BCD = BAC + ABC ist.

152. Lehrsatz.

Grundsysteme: Bild 70.

Gründe:	Folgen:
1) AC : : M = ac : : m.	AB : : M = ab : : m.
2) ACB = acb.	
3) ABC + abc = P.	

153. Wenn man die ersten Zusätze der von 144. bis 148. stehenden Lehrsätze auf rechtwinklige Dreiecke anwendet, so erhält man folgende Relationen, welche der ganzen Trigonometrie zur Grundlage dienen; wobei sich alle Bezeichnungen auf die Grundsysteme ABCA und abca (Bild 70.) beziehen, in welchen allemal die Winkel ACB und acb als rechte angenommen werden.

1) Wenn BAC = bac, so ist AC : AB = ac : ab und BC : AC = bc : ac (nach 144. Zus. 1.), ferner BC : AB = bc : ab (nach 146. Zus. 1.).
2) Wenn BC : AC = bc : ac, so ist BAC = bac, BC : AB = bc : ab und AC : AB = ac : ab (nach 147. Zus. 1.).
3) Wenn BC : AB = bc : ab, so ist BAC = bac, AC : AB = ac : ab und BC : AC = bc : ac (nach 148. Zus. 1.); denn da ACB = Q = acb, so ist BAC + bac < P.
4) Wenn AC : AB = ac : ab, so ist BAC = bac, BC : AB = bc : ab und BC : AC = bc : ac (nach 148. Zus. 1.); denn da ACB = Q = acb, so ist ABC + abc < P.

Wenn daher in einem Winkel MSN (Bild 75.) aus irgend einem Punkte A, der in dem einen Schenkel des

Winkels liegt, auf den andern Schenkel eine Linie AB senkrecht gezogen wird, so sind die Verhältnisse AB:AS, BS:AS und AB:BS nicht nur in diesem Winkel, sondern auch in jedem andern, der diesem gleich ist, beziehlich immer dieselben; umgekehrt, wenn eines der genannten Verhältnisse in mehreren Winkeln immer dasselbe ist, so sind alle diese Winkel unter einander gleich. Durch diese Betrachtung wird die Trigonometrie ermächtigt, sich bei ihren Untersuchungen statt der Winkel überall nur der eben erwähnten Verhältnisse zu bedienen.

§. 12.

Zu dem vorstehenden Paragraphen gehörige Aufgaben.

154. Aufgabe.

Den pten Theil einer gegebenen Linie K zu finden.

Vorbereit. Auflösungsmittel für diese Aufgabe stehen in 144. Zus. 4 und 5. und in den folgenden Sätzen, von denen aber hier blos die eben bezeichneten verfolgt werden.

Das in 144. Zus. 4. stehende Auflösungsmittel fordert zwei Dreiecke ABCA und abca (Bild 70.), in welchen ABC = abc, BAC = bac, AB = p. ab und AC = K ist, dann wird ac der verlangte pte Theil von K.

Hieraus erhält man folgende Auflösung: Man wähle nach Gefallen eine Linie ab und bestimme dann eine zweite AB so, daß AB = p. ab wird, über AB beschreibe man irgend ein Dreieck ABCA, in welchem AC = K ist, und dann über ab ein zweites abca in welchem abc = ABC und bac = BAC ist, so ist ac der verlangte pte Theil von K = AC.

Das in 144. Zus. 5. stehende Auflösungsmittel fordert zwei Dreiecke ABCA und abca (Bild 70.), in welchen ABC = abc, BAC = bac, AB = p. AC und ab = K ist, dann wird ac der verlangte pte Theil von K. Hieraus fließt folgende Auflösung: Man wähle irgend eine Linie AC und beschreibe über derselben ein Dreieck ABCA, in welchem AB = p. AC; hierauf beschreibe man ein zweites Dreieck abca, in welchem ab = K, abc = ABC und bac = BAC ist, so wird ac der verlangte pte Theil von K = AC.

Diese Auflösungen nehmen in der Ausübung eine noch bequemere Gestalt an, wenn man die beiden Dreiecke ABCA und abca in einer solchen gegenseitigen Lage konstruirt, wobei die Winkel ABC und abc oder BAC und bac entweder Scheitelwinkel werden oder gar in einen einzigen zusammenfallen.

Zugabe. Eine gegebene Linie in jede Anzahl gleicher und sich ergänzender Theile zu theilen.

155. Aufgabe.

Aus einer gegebenen Linie K eine andere L von der Beschaffenheit zufinden, daß L = q.S wird, wobei S den pten Theil von K bezeichnet.

Vorbereit. Sucht man zuerst den pten Theil von K (nach 154. Aufg.) und nimmt ihn hierauf q fach, so erhält man die gesuchte Linie L; es läßt sich diese aber auch finden, ohne daß erst der pte Theil von K gesucht werden muß, wozu unter andern die in 144. Zus. 2 und 3. stehenden Auflösungsmittel dienen.

Nach 144. Zus. 2. müssen zwei Dreiecke ABCA und abca (Bild 70.) gebildet werden, in welchen ABC = abc, BAC = bac, AB = p. R, ab = q. R und AC = K ist, dann wird ac die gesuchte Linie L. Hieraus erhält man folgende Auflösung: Man wähle nach Gefallen eine Linie R, mache AB = p. R und ab = q. R; hierauf beschreibe

man über AB ein Dreieck ABCA, in welchem AC=K ist, und über ab ein zweites abca, in welchem abc=ABC und bac=BAC ist, so wird ac=q. S, wobei S den pten Theil von K=AC bezeichnet.

Nach 144. Zus. 3. müssen zwei Dreiecke ABCA und abca (Bild 70.) gebildet werden, in welchen ABC=abc, BAC=bac, AB=p. R, AC=q. R und ab=K ist, dann ist ac die gesuchte Linie L. Hieraus fließt folgende Auflösung: Man wähle nach Gefallen eine Linie R und beschreibe ein Dreieck ABCA, in welchem AB=p. R und AC=q. R ist; hierauf beschreibe man ein zweites Dreieck abca in welchem ab=K, abc=ABC und bac=BAC ist, so wird ac=q. S, wobei S den pten Theil von K=AC bezeichnet.

Auch bei diesen Auflösungen ist es gewöhnlich am bequemsten, die Dreiecke ABCA und abca in einer solchen gegenseitigen Lage hervorzubringen, wobei die Winkel ABC und abc oder BAC und bac entweder Scheitelwinkel werden, oder gar in einen einzigen zusammenfallen.

Zugabe. Aus der gegebenen Linie K alle Vielfache von S bis p. S zu finden, wobei S den pten Theil von K ausdrückt.

Anmerk. Vorstehende Zugabe führt auf die Einrichtung des sogenannten verjüngten Maßstabes, wenn jedesmal die aus 144. Zus. 2. hergeleitete Auflösung gebraucht wird, und dabei immer die Winkel ABC, abc in einen einzigen zusammenfallen.

156. Aufgabe.

Zu drei gegebenen Linien K, L und R eine vierte S von der Beschaffenheit zu finden, daß K:L=R:S.

Vorbereit. Hieher gehörige Auflösungsmittel stehen in 144. Zus. 1 und 6. und in den folgenden Sätzen, von denen aber hier blos die eben bezeichneten weiter auseinandergesetzt werden.

Nach 144. Zus. 1. ist zuerst (Bild 70.) ein Dreieck ABCA zu konstruiren, in welchem AB=K und entweder AC=L oder AC=R ist; hierauf ein zweites abca, in welchem entweder ab=R oder ab=L (je nachdem AC=L oder AC=R) und sowohl bac=BAC als abc=ABC ist, dann wird ac die verlangte Linie S. Auch dieser Auflösung kann man vielerlei für die Ausübung bequemere Gestalten geben, wenn man die Dreiecke ABCA und abca in einer solchen gegenseitigen Lage beschreibt, wobei die Winkel ABC und abc oder BAC und bac in einen einzigen zusammenfallen, oder Scheitelwinkel werden.

Nach 144. Zus. 6. sind (Bild 72. oder 73.) zwei in einem Punkte E sich schneidende Linien hervorzubringen und AE=K, CE=L oder CE=R, und DE=R oder DE=L (je nachdem CE=L oder CE=R ist) zu machen; hierauf hat man eine Kreislinie zu beschreiben, welche durch die Punkte A, C und D geht, dann wird BE die gesuchte Linie S, wobei B den vierten Punkt bezeichnet, in welchem die Kreislinie die sich schneidenden Linien trifft.

157. Aufgabe.

Zu zwei gegebenen Linien K und L eine dritte R von der Beschaffenheit zu finden, daß K:R=R:L.

Vorbereit. Hierher gehörige Auflösungsmittel stehen in 144. Zus. 7. und 8., die zu nachstehenden Auflösungen führen.

Nach 144. Zus. 7. ist (Bild 72.) eine Linie AB hervorzubringen, in welcher AE=K und BE=L ist, hierauf eine Kreislinie zu beschreiben, deren Durchmesser AB ist; endlich durch E auf AB eine Linie senkrecht zu errichten, welche die Kreislinie in C schneidet, so ist CE die gesuchte Linie R.

Nach 144. Zus. 8. ist (Bild 74.) eine Linie AB=L und auf derselben AD=K hervorzubringen; hierauf eine Kreislinie zu beschreiben, deren Sehne BD ist; endlich aus A nach der Kreislinie eine Tangente zu ziehen, deren Berührungspunkt C ist, so ist AC die gesuchte Linie R.

158. Aufgabe.

Zu zwei gegebenen gleichartigen Gemäßen M und m und einer gegebenen Linie K eine andere L von der Beschaffenheit zu finden, daß K::M=L::m.

Vorbereit. Die Auflösung dieser Aufgabe wird hier blos an den in 144. Lehrs. und 147. Lehrs. stehenden Auflösungsmitteln betrachtet.

Nach 144. Lehrs. ist ein Dreieck ABCA (Bild 70.) zu bilden, in welchem AC=K ist, hierauf ein zweites abca zu beschreiben, in welchem bac=BAC, abc=ABC und ab::m=AB::M ist, dann giebt ac die gesuchte Linie L.

Nach 147. Lehrs. ist ein Dreieck ABCA (Bild 70.) zu bilden, in welchem BC=K ist, hierauf ein zweites abca zu beschreiben, in welchem bac=BAC, ac::m=AC::M und ab::m=AB::M ist, dann giebt bc die gesuchte Linie L.

Beide vorstehenden Auflösungen setzen immer selbst wieder eine Auflösung obiger Aufgabe voraus (jene for-

dert nämlich eine Linie ab so, daß ab::m=AB::M, diese noch außerdem eine Linie ac so, daß ac::m=AC::M), so daß sie in einem Zirkel sich zu bewegen scheinen; allein dieser Schein verschwindet, wenn man erwägt, daß schon in der Longimetrie eine von diesen unabhängige Auflösung jener Aufgabe unmittelbar aus der dort für das Maß einer Linie gegebenen Erklärung geschöpft werden kann. Deßwegen werden jedoch die hier gegebenen Auflösungen nicht überflüssig, sondern bleiben von großem Nutzen, wo sich in der Ausübung dem unmittelbaren Messen einer Linie bedeutende Schwierigkeiten in den Weg legen.

Zugabe. Das Maß einer gegebenen Linie K nach einem gegebenen Gemäße M mittelbar zu finden. Man sucht nämlich nach vorstehender Aufgabe eine Linie L, die nach dem gleichartigen Gemäße m gleiches Maß giebt, und mißt diese dann unmittelbar.

Anmerk. Besonders vortheilhaft sind obige Auflösungen in der praktischen Feldmeßkunst deßwegen, weil das Gemäß m so klein gewählt werden kann, daß sich das Dreieck abca bequem auf einer eigens zu diesem Behufe eingerichteten ebenen Fläche beschreiben läßt.

159. Aufgabe.

Einen Winkel L zu beschreiben, der einem andern völlig bestimmten K gleich ist.

Vorbereit. Von den vielen hierher gehörigen Auflösungsmitteln werden der Kürze wegen blos die in 147. stehenden betrachtet.

Nach 147. Lehrsatz erhält man eine Auflösung, wenn der Winkel K oder ABC in einem Dreiecke ABCA (Bild

70.) liegt, von dem der Winkel BAC und die Maße der Seiten AB und AC nach dem Gemäße M bekannt sind; beschreibt man nämlich ein zweites Dreieck abca, in welchem bac = BAC, ab :: m = AB :: M und ac :: m = AC :: M ist, wobei m ein dem M gleichartiges Gemäß bezeichnet, so ist dann abc der verlangte Winkel L.

Nach 147. Zusatz 1. erhält man eine Auflösung, wenn der Winkel K oder ABC in einem Dreiecke ABCA (Bild 70.) liegt, von dem der Winkel BAC und das Verhältniß AB : AC bekannt sind; beschreibt man nämlich ein zweites Dreieck abca, in welchem bac = BAC und ab : ac = AB : AC, so ist dann abc der verlangte Winkel L.

Nach 147. Zusatz 3. erhält man eine Auflösung, wenn der Winkel K oder ABC in einem Dreiecke ABCA (Bild 70.) liegt, von dem man den Winkel BAC kennt und von dem man weiß, daß AB die pfache und AC die qfache einer und derselben Linie sey; beschreibt man nämlich ein zweites Dreieck abca, in welchem bac = BAC, ab = p. S und ac = q. S ist, wobei S eine beliebige Linie vorstellt, so ist dann abc der verlangte Winkel L.

Nach 146. Zus. 5. erhält man eine Auflösung, wenn der Winkel K oder ABC in einem Dreiecke ABCA (Bild 70.) liegt, von dem man den Winkel BAC kennt und von dem man weiß, daß AB die pfache von AC ist; beschreibt man nämlich ein zweites Dreieck abca, in welchem bac = BAC und ab die pfache von ac ist, so ist dann abc der verlangte Winkel L.

160. Aufgabe.

Eine gegebene Linie K in zwei Theile zu trennen, welche zu einander in einem gegebenen Verhältnisse R:S stehen.

Vorbereit. Das in 140. Zus. 2. stehende Auflösungsmittel führt auf dem kürzesten Wege zu folgender Auflösung: Wenn über die gegebene Linie K oder AB (Bild 69.) ein Dreieck ABCA, in welchem die Seite AC aus zwei Linien An und Cn zusammengesetzt ist, die sich zu einander wie R zu S verhalten, beschrieben, und durch n eine Linie nm gleichlaufend mit BC gezogen wird, so wird AB in zwei Linien Am und Bm zerlegt, die sich ebenfalls zu einander wie R zu S verhalten.

Man gelangt aber auch zu einer Auflösung, wenn man das in 144. Zus. 1. stehende Auflösungsmittel verfolgt. Diesem zu Folge sind zwei Dreiecke zu konstruiren, welchen die daselbst in den Gründen bedingten Merkmale zukommen, so daß die hier gemachte Forderung eine nothwendige Folge jener Merkmale wird; dabei können diese Dreiecke neben einander liegend oder einander entgegengesetzt seyn. Im ersten Falle kommt man auf Umwegen wieder zu der eben erhaltenen Auflösung, im andern stößt man auf folgende: Von den Endpunkten der gegebenen Linie K oder AB (Bild 63.) aus ziehe man nach entgegengesetzten Seiten die Linien AC und BE so, daß ABE = BAC wird; hierauf bestimme man die Linien AC und BE so, daß sie sich zu einander wie R zu S verhalten, endlich ziehe man CE, welche die AB in D schneidet, so haben auch die Theile AD und BD das gegebene Verhältniß R: S zu einander.

161. Aufgabe.

In einer gegebenen Linie AB (Bild 76.) einen Punkt C so zu bestimmen, daß AC:BC = BC:AB.

Vorbereit. Hieher gehörige Auflösungsmittel stehen in 144. Zus. 7. und 8., von denen aber blos das letztere, welches die kürzesten Betrachtungen veranlaßt, hier auseinandergesetzt wird. Dieses fordert eine Kreislinie durch den Punkt B (Bild 76.) an dieselbe eine Tangente aus A, deren Berührungspunkt E ist, und noch überdieß, daß AE = BC sey; denn es ist (nach 144. Zus. 8.) AC:AE = AE:AB, folglich, wenn AE = BC ist, AC:BC = BC:AB. Um alle Weitläufigkeiten zu vermeiden, wird hier gleich von dem einfachsten Falle ausgegangen, wobei der Mittelpunkt dieser Kreislinie in AB liegt und also BC ein Durchmesser derselben wird; dieser Mittelpunkt sey D. Nun ist wie oben gelehrt worden ist, AE eine Tangente der Kreislinie, wenn E in derselben liegt und AED = Q ist; aber E liegt in der Kreislinie, wenn DE = BD ist, wobei DE eine gerade von D nach E gezogene Linie bezeichnet; und wieder ist DE = BD, wenn DBE = DEB ist, wobei man sich eine gerade von B nach E gezogene Linie vorzustellen hat. Erwägt man hierbei noch, daß die Bestimmung der Kreislinie gänzlich von der des Mittelpunktes D, und diese wieder von der des Punktes E abhängt, so kann man statt obiger Forderungen diese setzen: Einen Punkt E außer AB von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn AED = Q ist, sowohl DEB = DBE als AE = BC, oder, weil CD = BD ist, AE = 2 BD, oder auch, weil BD = DE ist, AE = 2. DE sey.

Da außer den Endpunkten der gegebenen Linie AB kein Punkt weiter bekannt ist, so muß offenbar die Konstruktion des geforderten Systems von diesen beiden Punkten ausgehen; man hat daher zuvörderst alle Aufmerksamkeit auf die Bestimmung der Linien AE und BE rücksichtlich ihrer Lage zu wenden, und zu dem Ende jene Aufgaben welche die Beschreibung eines Winkels aus andern Bestimmungsstücken lehren, worunter insbesondere die in 159. befindliche gerechnet werden muß, zu berücksichtigen. Weil nun in dem Dreiecke ADEA der Winkel AED = Q bekannt und überdieß AE = 2. DE ist, so wird man nach Anleitung der vierten daselbst (in 159.) gegebenen Auflösung in den Stand gesetzt, sowohl einen dem BAC gleichen Winkel R als einen dem ADE gleichen Winkel S hervorzubringen. Zieht man daher AF so, daß BAF = R = BAE wird, so muß in der Linie AF der gesuchte Punkt E liegen, und zwar ist es derjenige, welcher die Eigenschaft besitzt, daß wenn durch ihn eine Linie ED senkrecht auf AF gezogen wird (d. h. wenn AED = Q ist), DBE = DEB sey; es ist nämlich AF eine Bestimmungslinie des gesuchten Punktes E, welche der Forderung AE = 2. DE Genüge leistet, wie sich mittelst 144. Zus. 5. leicht einsehen läßt. Nun wird aber DBE = DEB, wenn ADE = 2. DBE (weil nämlich ADE = DEB + DBE ist), oder, welches dasselbe ist, wenn DBE = $\frac{1}{2}$ ADE, oder endlich (weil der oben gefundene Winkel S dem ADE gleich ist) wenn DBE = $\frac{1}{2}$ S ist; es läßt sich folglich die Lage der Linie BE und durch sie der Punkt E selbst bestimmen. Hat man auf diese Weise den Punkt E gefunden, so hält die endliche Bestimmung aller übrigen Theile des gesuchten Systems nicht mehr schwer; man kann aber noch überdieß den geforderten Punkt C un-

abhängig von den noch fehlenden Theilen angeben, wenn man bedenckt, daß BC = AE ist.

So gelangt man durch die allgemeinsten Betrachtungen zur Auflösung obiger Aufgabe, von der hier noch einige besondere Umformungen angegeben werden. Errichtet man nämlich BF = 1/2 AB senkrecht auf AB und zieht AF, so ist BAF = DAF (denn es ist BAF hier in einem besondern Falle der vorhin erwähnte Winkel R); man hat also in der Linie AF nur noch den gesuchten Punkt E von der Beschaffenheit zu bestimmen, daß, wenn AED = Q ist, DEB = DBE sey. Nun wird aber DEB = DBE, wenn BEF = EBF ist (weil DEF = DBF = Q ist); und wieder wird BEF = EBF, wenn EF = BF ist. Aus dieser Betrachtung ergeben sich nun ohne Schwierigkeit folgende zwei besondere Auflösungen:

a) Man errichte BF senkrecht auf AB, mache BF = $\frac{1}{2}$. AB und ziehe AF; hierauf mache man EF = BF und endlich BC = AE, so ist AC:BC = BC:AB.

b) Man errichte BF senkrecht auf AB und verlängere AB nach G; macht man nun BF = $\frac{1}{2}$. AB, ferner BG = BF und endlich GC = AF, so ist AC:BC = BC:AB. Denn da nach voriger Auflösung AC = AB − AE, so ist auch AC = (AB + BG) − (AE + EF), weil BG = BF = EF, folglich ist AC = AG − AF, was hier geschehen ist.

Zu diesen besondern Auflösungen hätte man auf einem weit bequemern Wege, nach Anleitung des in

140. Zus. 2. stehenden Auflösungsmittels gelangen können; der schwierigere aber ist hier vorgezogen worden, um die Wirksamkeit der einen allgemeinen Auflösungsmethode auch an einem zusammengesetztern Beispiele erproben zu können.

Verbesserungen.

Seite	19	Zeile	12	streiche durch oder Aufgaben.
—	30	—	16	$A<C$ statt $A>C$.
—	36	—	27	füge hinzu (aus 7. Zus. 2).
—	37	—	11	liegt statt lag.
—	43	—	28	11. Zus. 4. statt 11. Zus. 5.
—	—	—	31	2. Zus. 6. statt 2. Zus. 5.
—	45	—	26	2. Zus. 6. statt 2. Zus. 5.
—	51	—	3	8. Zus. 2. statt 7. Zus. 2.
—	57	—	13	Auflösungsmittel statt Auflösung.
—	—	—	20	Biegsamkeit statt Bewegsamkeit.
—	80	—	21	füge hinzu (aus 48. Zus. 2).
—	81	—	4	Summen statt Summe.
—	82	—	18	(siehe Zus. 2. und 51. Zus 4.) statt (siehe 42. Erkl.)
—	83	—	13	43. Zus. 3. statt 45. Zus. 2.
—	—	—	16	streiche durch nach 47. Lehrs.
—	85	—	12	43. Zus. 2. statt 43 Zus. 1.
—	—	—	24	Zus. 4 und 5 statt Zus. 5.
—	—	—	31	49. Zus. 2. anstatt 48. Zus. 2.
—	125	—	5	Grundsysteme statt Grundsystem.
—	—	—	15	hält statt hielt.
—	126	—	5	Grundsysteme statt Grundsystem.
—	—	—	13	dritte statt erste.
—	134	—	11	recht statt stumpf.
—	135	—	26	BAC statt ABC.
—	142	—	20	Grundsysteme statt Grundsystem.
—	185	—	18	nach 139 Lehrs. statt nach 138 Lehrs.
—	—	—	20	nach 138. Zus. 2 statt nach 137. Zus. 2.
—	186	—	1	nach 138. Zus 1. statt nach 137. Zus. 1.
—	187	—	4	nach 138. Zus. 1. statt nach 137. Zus. 1.
—	188	—	13	nach 139. Zus. statt nach 138. Zus.
—	—	—	16	nach 138. Zus. 1. statt nach 137. Zus. 1.

Seite 188 Zeile 20 siehe Grund 1 und 2 statt siehe 1 und 2.

— — — 22 nach 140. Vorbereit. a statt nach a.

— 190 — 2 $\beta\alpha\gamma = BAC$ statt $\alpha\beta\gamma = ABC$.

— — — 12 u. 13 nach 140. Zus. 1. statt nach 139. Zus.

— — — 21 nach 140. Lehrs. statt nach 139. Lehrs.

— — — 28 u. 29. in 140. Lehrs. und Zus. 1. statt in 139. Lehrs. und Zus.

— 191 — 16 nach 140. Zus. 1. statt nach 139. Zus.

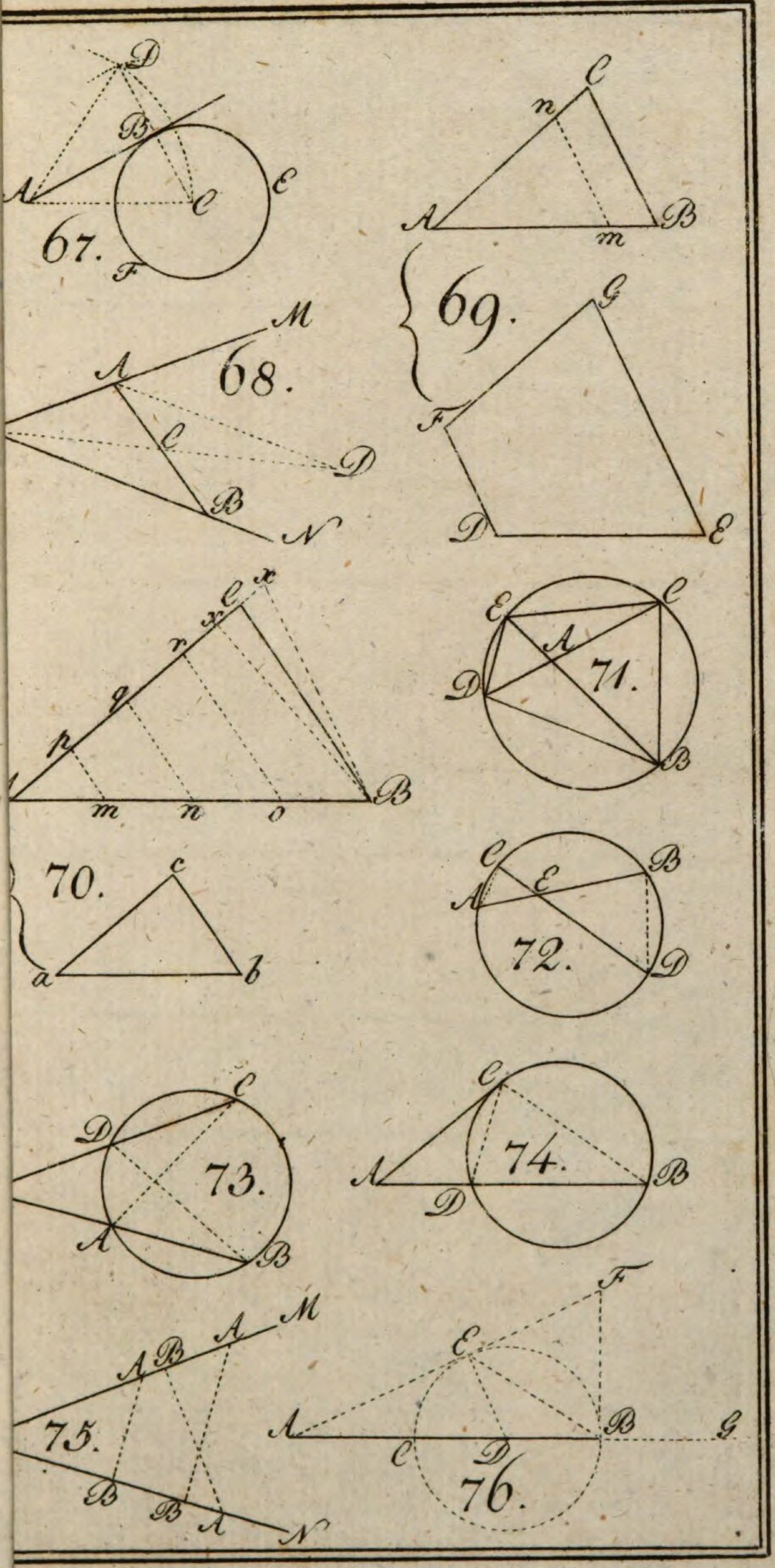
— — — 26 nach 140. Lehrs. statt nach 139. Lehrs.

— — — 51 siehe 141. Zus. 4. statt 140. Zus. 4.

— 192 — 4 siehe 141. Zus. 5. statt siehe 140. Zus. 5.

— 219 — 23 147. Zus. 5. statt 146. Zus. 5.

Bei 93. Lehrsatz sowohl, als bei 94. Lehrsatz fehlt die Angabe der in Bild 24. bezeichneten Grundsysteme.


67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.

2 Y.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Georg Simon,

Grundlinien zu einer zweckmäßigen Behandlung der Geometrie als höheren Bildungsmittels an vorbereitenden Lehranstalten

Erlangen 1817

Math.p. 382 cs
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082498-5